ELEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE E TRASFORMATE

Andrea
Bertazzoni
886586

A.A. 2019/20

SPAZI DI FUNZIONI

Spazio Vettoriale

Ω è un insieme, $\mathcal{F}_\Omega = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ (\text{o } \mathbb{C}) \}$ spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda f(x) \end{aligned}\right\}$$ queste operazioni sono garantite in uno spazio vettoriale

$C^0(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \}$ è uno spazio vettoriale

Criterio di riconoscimento dei sottospazi

X è uno sp. vett. su $\mathbb{R}$

$X_0 \subseteq X$, allora X_0 è un sottospazio vettoriale di X se
$\forall x, y \in X_0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda x + \mu y \in X_0$
combinazioni lineari di elementi del sottospazio sono ancora elementi del sottospazio

Esempi:

$X_1 = C^1(a,b)$ è uno sp. vett.? SÍ

$X_2 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}, \ f(x) \geq 0 \ \forall x \}$? NO

$X_3 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ periodica} \}$? NO

f_1 T_1-periodica $\quad f_2$ T_2-periodica $\quad f_1 + f_2$ T-periodica se $T = nT_1 = mT_2$
$\implies T_1/T_2 = n/m \in \mathbb{Q}$ $\quad$ Se $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ allora f_1+f_2 non è periodica $\quad n, m = 1, 2, 3 \ldots$

Spazio Vettoriale Normato

Sia X uno sp. vett su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
Dico che è uno sp. vett normato se è definita una funzione: $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ con queste proprietà:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall x \in X$ (proprietà di annullamento)

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in X$ (proprietà di omogeneità)

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

Esempi: $\mathbb{R}^n$,

norma 2
$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$ (norma Euclidea) o Pitagorica

norma 1
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

norma p
$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

norma 4
$\|x\|_4 = \sqrt[4]{x_1^4+x_2^4+\dots+x_n^4}$

In uno spazio vettoriale normato di dimensione finita, tutte le norme sono tra loro equivalenti, cioè:

se $\|\dots\|_1$, $\|\dots\|_2$ sono 2 diverse norme su X (di dim. finita) allora $\exists\, c_1, c_2$ t.c.:

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x$$

Negli sp. vett. di dim. infinita, non sempre esiste una norma, e se ne esistono tante, non sempre sono equivalenti fra loro.

Spazi Vettoriali Normati di Funzioni

$C^0[a,b]$ → l'intervallo chiuso è importante

$\|f\|_{C^0[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ norma naturale

Per il teo. di Weierstrass, $\forall f \in C^0[a,b]$, $\|f\|_{C^0} < \infty$

1. $\|f\|_{C^0} = 0 \Rightarrow f = 0$
2. $\|\lambda f\|_{C^0} = \max_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \max |f(x)| = |\lambda|\, \|f\|_{C^0}$
3. $f, g \in C^0[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0}$

Più in generale, se K è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, $C^0(K)$ è uno sp. vett. normato con $\|f\|_{C^0(K)} = \max_{x\in K} |f(x)|$

In $C^0[a,b]$ posso definire anche: $\|f\|_{L^1[a,b]} = \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$ norma integrale

1. $\|f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ e f continua $\Rightarrow f = 0$
2. $\|\lambda f\|_{L^1} = \int_a^b |\lambda f(x)|\,dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)|\,dx = |\lambda|\, \|f\|_{L^1}$
3. $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx$

$\|f+g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

(i.e. NON EQUIVALENTI, $\mathcal{C}^0$ é uno spazio INFINITO)

$\|\dots\|_{\mathcal{C}^0}$ e $\|\dots\|_{L^1}$ sono 2 norme MOLTO DIVERSE fra di loro!

$\mathcal{C}^1[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ derivabile e continua$\}$ é uno sp. vett.

$\|f\|_{\mathcal{C}^0}$, $\|f\|_{L^1}$ sono norme ammissibili in $\mathcal{C}^1[a,b]$

$\max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \|f\|_1$ é una norma ?

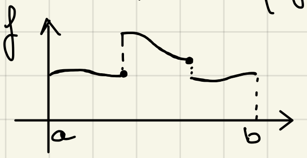
1. $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f' \equiv 0 \Longrightarrow f = \text{const.}$ (non necessariamente 0)

$\hookrightarrow$ non rispetta la proprietá di annullamento!
NON é una NORMA

$\|f\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} = \|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} + \|f'\|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$ é una norma ? $\Longrightarrow$ SÍ

$R(a,b) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ é (limitata e) Riemann-integrabile$\}$

a integrale unico e finito
(limitata, non per forza continua)



$\|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$ é una norma ✓

$\|f\|_{L^1[a,b]}$ NON é una norma ✗
(non rispetta la proprietá 1)

Spazi di funzioni continue definite su tutto $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ é uno sp. vett. non normato

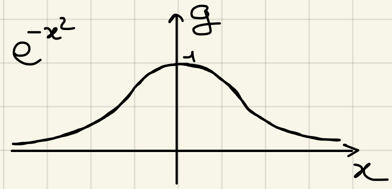
In questo spazio $\nexists$ una norma naturale

bounded

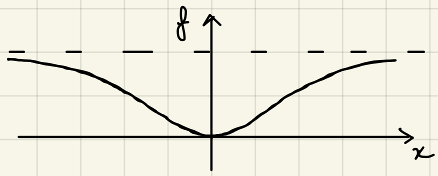
$\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ continua e limitata$\}$ é uno sp. vett..

$\to \|f\|_{\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$

$g(x) = e^{-x^2}$



$f(x) = 1 - e^{-x^2}$



$\sup |f(x)| = 1$

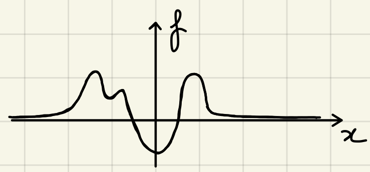
$\max |f(x)| \nexists$

$\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$ é uno sp. vett. NORMATO

$\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ cont. e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\}$

$\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$

é un sottosp. vett normato



(la norma integrale, invece, non é ben definita)

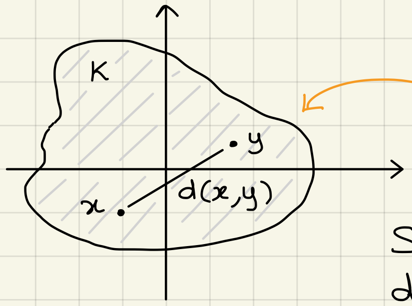
Spazio Metrico

Sia K un insieme. Si dice che é uno spazio metrico se é definita una funzione (DISTANZA) $d: K \times K \to [0,+\infty)$ tale che:

1) $d(x,y)=0 \iff x=y$ (proprietá di annullamento)

2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria) $\qquad x,y \in K$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare)



Uno sp. metrico non necessariamente é uno sp. vett.

Se X é uno sp. vett. normato, e poniamo $d(x,y) = \|x-y\|$, questa é una distanza

1) $d(x,y)=0 \Rightarrow \|x-y\|=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

$x,y \in X$ $\qquad$ 2) $d(y,x) = \|y-x\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$

3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| = \|x-z\| + \|z-y\| =$
$= d(x,z)+d(z,y)$

$\Longrightarrow$ Ogni sp. vettoriale normato é anche uno sp. metrico ponendo $\|x-y\| = d(x,y)$ ("distanza della norma")

Se (K,d) é uno sp. metrico e $K_0 \subseteq K$, anche (K_0,d) é metrico

Se $(X, \|\ldots\|)$ é uno sp. vett. normato, é anche metrico, ogni suo sottoinsieme X_0 sará metrico, ma in generale non sará uno sp. vett.

sp. metrico $\not\Longrightarrow$ sp. vett. (normato)
sp. vett. normato $\Longrightarrow$ sp. metrico

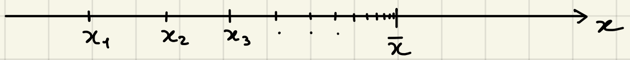
sp. vett e metrico $\Longrightarrow$ sp. vett. normato? NO. Esistono esempi (non elementari) di sp. vett. in cui é def. una distanza, ma questa non proviene da una norma

Sia (K,d) uno sp. metrico
La sfera di centro x e raggio $r>0$ é l'insieme:
$$B_r(x) = \{y \in K \mid d(x,y) < r\} \quad (\text{"sfera aperta"})$$

($B_r(x)$ si dice anche intorno sferico di x)
A partire dagli intorni sferici, si possono dare tutte le definizioni di "topologia" degli spazi ($\neq$ ma simili da quelle del solo insieme $\mathbb{R}^n$)

Si vuole avere un criterio per poter dire che una certa successione in uno sp. metrico è convergente (senza bisogno di sapere già quale sia il limite)

Idea: se gli zeri $\{x_n\}$ tendono a qualche punto $\bar{x}$, in particolare saranno sempre più vicini tra loro



Def: Sia X, d uno sp. metrico e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una successione di elementi di X. Si dice che la successione $\{x_n\}$ è di CAUCHY se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Più sinteticamente:

$$\{x_n\} \text{ è di Cauchy se } d(x_n, x_m) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n, m \longrightarrow \infty$$

In particolare, se $(X, \|\ldots\|)$ è uno sp. vett. normato, si dice che $\{x_n\} \subseteq X$ è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

ossia se $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ per $n, m \longrightarrow \infty$

Teorema: Se (X, d) è uno sp. metrico, $\{x_n\} \subseteq X$, $x_n \to \bar{x} \in X$ allora la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy.

"Ogni successione convergente è di Cauchy"

Ci piacerebbe sapere che è vero anche il viceversa, ossia che se una successione è di Cauchy, allora converge (a un qualche limite).
↳ Questo dipende dallo spazio ambiente

Es: $X = \mathbb{Q}$. $d(x, y) = |x - y|$ $\quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$
$x_n \longrightarrow e = 2{,}71\ldots \notin \mathbb{Q}$
Quindi la succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ non è convergente in $\mathbb{Q}$ (mentre è conv. in $\mathbb{R}$).
$\{x_n\}$ però è di Cauchy in $\mathbb{Q}$.
↳ non è vero che se $\{x_n\}$ è di Cauchy allora converge (in $\mathbb{Q}$)

Def: Sia (X,d) uno sp. metrico. Si dice che lo spazio é completo se ogni successione di Cauchy in X é convergente a qualche elemento di X

→ $\mathbb{Q}$ non é completo
$\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y|$, é uno spazio metrico completo.

Def: Se X é uno sp. vett. normato, completo (come sp. metrico), si dice che X é uno spazio di BANACH.

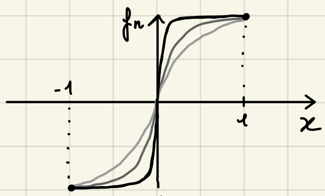
Esplicitamente: $(X, \|\ldots\|)$ sp. vett. normato. Se $\{x_n\}$ é di Cauchy, ossia $\|x_n - x_m\| \to 0$ per $n,m \to \infty$, allora $\exists \bar{x} \in X$ t.c. $x_n \to \bar{x}$ cioé $\|x_n - \bar{x}\| \to 0$

Spazio Metrico Completo

Esempio di spazio vettoriale normato (di funzioni) non completo.

$X = C^0[-1,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{se } x \in [0,1] \\ -|x|^{1/n} & \text{se } x \in [-1,0) \end{cases}$$



$$\|f\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$$

Devo dimostrare che X é uno sp. vett. normato e NON completo (con la norma L^1)!

f_n é di Cauchy in questo sp. vett. normato

$$\|f_n - f_m\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 2\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 |x^{1/n} - x^{1/m}|\,dx = 2\int_0^1 (x^{1/n} - x^{1/m})\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^{1/n+1}}{1/n+1} - \frac{x^{1/m+1}}{1/m+1}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{\frac{1}{m}+1}\right) \xrightarrow{n,m \to +\infty} 2(1-1) = 0$$

$$\underbrace{\|f_n - f\|_{L^1}}_{2\int_0^1 |x^{1/n} - 1|\,dx} \to 0 \quad \text{dove } f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x \in [-1,0) \end{cases}$$

$$2\int_0^1 |x^{1/n} - 1|\,dx = 2\int_0^1 (1 - x^{1/n})\,dx = 2\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right) \to 0$$

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x \in [-1,0) \end{cases} \Longrightarrow f \text{ é discontinua}$$

$f_n \to f$ in norma L^1 ma $f \notin C^0[-1,1]$

non esiste $g \in C^0[-1,1]$ t.c. $f_n \to g$ in norma L^1

$\{f_n\}$ é di Cauchy ma non converge in questo spazio, quindi lo spazio NON é COMPLETO

Successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$)

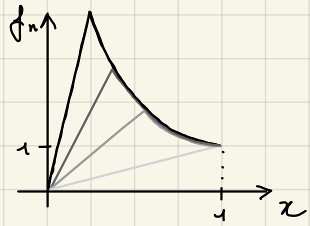
Si dice $f_n \to f$ puntualmente in I se $\forall x \in I \ \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

Esempi: 1. $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} & x \in [0,1] \\ -|x|^{1/n} & x \in [-1,0) \end{cases}$

f_n sono continue in $[-1,1]$, $f_n \to f$ in $[-1,1]$ puntualmente
f non è continua

2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (\frac{1}{n}, 1] \\ n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$

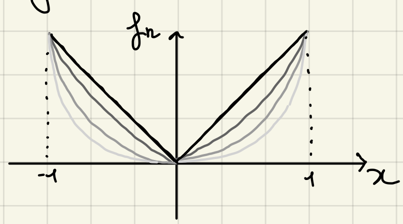
$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\} = f(x)$$



Ogni f_n è continua e limitata.
f è discontinua e illimitata.

3. $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$

$f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} |x| = f(x)$ $\quad$ f_n è derivabile $\forall n$, $f_n \in C^1[-1,1]$
f è continua ma non derivabile



La nozione di convergenza puntuale è troppo debole per garantire che la funzione limite conservi le "buone proprietà" delle f_n.
Ci vorrà una nozione più impegnativa di convergenza.

Convergenza uniforme

Def: Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\ n = 1, 2, 3 \dots$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che $f_n \to f$ uniformemente se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I}$$

Confronto con $f_n \to f$ puntualmente:

$$\boxed{\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

n_0 può dipendere da x e da n_0

n_0 può dipendere solo da ε

Formulazione alternativa della conv. unif.:

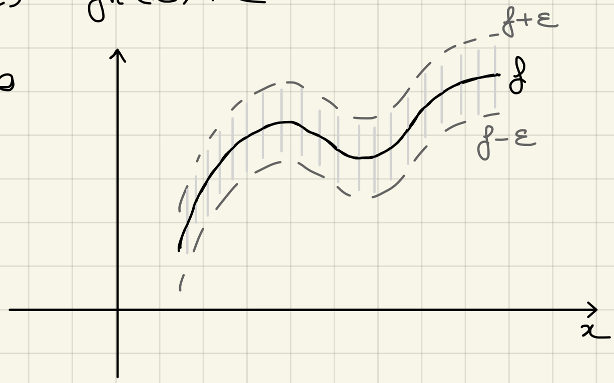
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_{\mathcal{C}^0[I]}} \leq \varepsilon$$

"La convergenza uniforme è la convergenza in norma $\mathcal{C}^0$".

Significato geometrico della conv. unif.:

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_n(x) + \varepsilon$

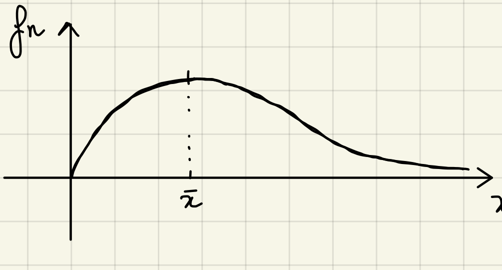
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$ il grafico di f cade totalmente nella "striscia"



<u>Es:</u> $\quad f_n(x) = nxe^{-n^2x^2} \qquad f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Per x fissato e $n \to \infty$ $\quad f_n(x) \to 0 \;\; \forall x \qquad f(x) \equiv 0$
$f_n \to f \quad f_n \to 0$ puntualmente in $[0, +\infty)$

$f_n \to 0$ anche uniformemente in $[0, +\infty)$? Cioè:
$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| \to 0$ per $n \to +\infty$?
il modulo si può togliere



Calcolo il massimo:

$f_n'(x) = n e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2) \geq 0$ per $x^2 \leq \frac{1}{2n^2}$

$\bar{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\,n} \qquad \nearrow \searrow \qquad \bar{x}$ è p.to di max.

$$\max_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$\Rightarrow \|f_n\|_{\mathcal{C}^0[0,+\infty)} = 1/\sqrt{2e} \not\to 0$ per $n \to \infty$ quindi
f_n NON tende a f uniformemente

Altro modo per dimostrare che la conv. NON è unif.

$f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$

Ad es. $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot 1/n \, e^{-\frac{n^2}{n^2}} = 1/e$ dunque $\|f_n\|_{\mathcal{C}^0} \geq 1/e$

perciò $f_n \not\to 0$ per $n \to \infty$ quindi f_n non conv. unif.

Sull'intervallo $[\delta, +\infty)$ (per $\delta > 0$) la conv. è uniforme

$$\max_{x \in [\delta, +\infty)} f_n(x) = f_n(\delta) \to 0$$

per n abbastanza grandi

<u>Teorema</u> (<u>convergenza uniforme e continuità</u>)

Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che $f_n \to f$ unif. in I. Se tutte le f_n sono continue in $\bar{x} \in I$, allora anche f è continua in $\bar{x}$.

("Il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continua")

<u>Dim</u>: devo dimostrare che f è cont. cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in I \ |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Suppongo che $f_n \to f$ unif. cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \text{ si ha } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Fissiamo n_0 come sopra e scriviamo

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| + |f_{n_0}(\bar{x}) - f(\bar{x})|$$
$$< 2\varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})|$$

disug. triang.

Poiché f_{n_0} è continua in $\bar{x}$, per $\varepsilon > 0$ fissato $\exists \delta > 0$ t.c

$$|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| < \varepsilon$$

Allora se $|x - \bar{x}| < \delta$ si ha $|f(x) - f(\bar{x})| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$

Abbiamo dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in I \ |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < 3\varepsilon$$

Voglio dimostrare che lo spazio $C^0[a,b]$, con la norma C^0, è completo (spazio di Banach)

Mi serve prima questo risultato:

<u>Teorema</u>

Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che la succ. $\{f_n\}$ soddisfi:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I$

Allora $\exists f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ uniformemente.

(Vale anche il viceversa: se $f_n \to f$ unif. allora $\{f_n\}$ soddisfa la (*))

La (*) si chiama "condizione di Cauchy per la conv. unif."

Se (X, d) è uno sp. metrico, $\{x_n\}$ è di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Se $(X, \| \|)$ è uno sp. vett. normato, $\{f_n\}$ è di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

Dim: 1) mostriamo che $\exists f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ puntualmente in I
2) mostriamo che $f_n \to f$ unif.

1) Mostriamo che fissato comunque $\bar{x} \in I$, la succ. $f_n(\bar{x})$ è conv. (a un limite finito $f(\bar{x})$)

Hp: (*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$
in particolare $|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| < \varepsilon$

ossia la succ $\{f_n(\bar{x})\}$ (è una succ. di num. reali) è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Ma $\mathbb{R}$ è COMPLETO
Quindi $\{f_n(\bar{x})\}$ è convergente a un certo limite $f(\bar{x})$.

$\bar{x}$ è un x qualsiasi in I, perciò ho provato che $\exists f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ puntualmente in I.

2) Mostriamo che $f_n \to f$ unif.

Hp: (*) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

$$\underbrace{\lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)|}_{|f_n(x) - f(x)|} \leq \varepsilon$$

Abbiamo dimostrato che
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I$ cioè $f_n \to f$ unif.

Teorema Lo spazio $\mathcal{C}^0[a,b]$ con la norma $\mathcal{C}^0$ è completo (spazio di Banach)

Dim: $\mathcal{C}^0[a,b] \quad \|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Sappiamo già che è uno sp. vett. normato
Mostriamo che è completo.

Sia $\{f_n\}$ di Cauchy in $\mathcal{C}^0[a,b]$ cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad \| f_n - f_m \|_{\mathcal{C}^0[a,b]} < \varepsilon$ $\quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Allora la succ $\{f_n\}$ soddisfa la "cond. di Cauchy per la conv. unif." e per il teo. precedente: $\exists f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ unif.

Poiché le f_n sono continue e $f_n \to f$ unif., anche f è continua ($f \in \mathcal{C}^0(a,b]$)

Dire che $f_n \to f$ unif. significa che $\| f_n - f \|_{\mathcal{C}^0[a,b]} \to 0$ cioè $f_n \to f$ in $\mathcal{C}^0[a,b]$. Quindi $\{f_n\}$ è convergente in $\mathcal{C}^0$, e $\mathcal{C}^0[a,b]$ è completo.

Più in generale se K è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^0(K)$ con $\| f \|_{\mathcal{C}^0(K)} = \max_{\vec{x} \in K} | f(\vec{x}) |$ è uno sp. vett. normato completo

<u>Osservazioni sintattiche</u> su quando scrivere f o $f(x)$

Si scrive $\| f \|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$ e NON $\| f(x) \|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$

$$\| f \|_{\mathcal{C}^0[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} | f(x) | = \max_{t \in [a,b]} | f(t) |$$

$f_n(x) \to f(x)$ oppure $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ SI

$f_n(x) \to f$ NO $\qquad f = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ NO

Se le f_n hanno una certa proprietà e $f_n \to f$, anche la f ha quella proprietà?

In generale NO (dipende sopratutto dal tipo di conv.)

1. $f_n \to f$ unif. e f_n è cont., allora anche f è cont. (convergenza uniforme e continuità)

2. <u>Teorema</u> (conv. unif. e limitatezza)

Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, $f : I \to \mathbb{R}$ e f_n limitate, se $f_n \to f$ unif allora anche f è limitata

3. Teorema (conv. unif. e integrabilità)

Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabili e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se $f_n \to f$ unif in $[a,b]$ allora f è Riemann-integrabile e $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ per $n \to +\infty$.

$$\to \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

"Si scambiano tra loro limite e integrale"

4. Conv. unif. e derivabilità

Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n derivabile. $f_n \to f$ uniformemente. È vero che f è derivabile? NO

Ad es: $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}} \in C^1[-1,1]$ $\quad f_n(x) \to |x| = f(x)$ che non è derivabile

$f_n \to f$ unif.

$$f_n'(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{1/n}\,\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right) x^{1/n} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{1/n} & x<0 \end{cases}$$

Idea: se f_n sono derivabili e $f_n \to f$ forse per ottenere che f sia derivabile occorre che f_n' converga uniformemente a una certa funzione.

Teorema Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ derivabili nell'intervallo I e supponiamo che:

1) $\exists f : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ punt. in I

2) $\exists g : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n' \to g$ unif. in I

Allora:

1) f è derivabile

2) $f' = g$ (perciò $f_n' \to f'$ unif.)

3) $f_n \to f$ unif.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'$$

"Si scambiano tra loro limite e derivata"

Teorema: Lo spazio vettoriale normato $\mathcal{C}^1[a,b]$ con la norma
$$\|f\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} = \|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} + \|f'\|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$$
è completo.

Spazi di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ non ha una norma naturale

$\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata (e continua)} \}$

$\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \to 0 \text{ per } x \to \pm\infty \text{ (e } f \text{ continua)} \}$

$\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (f \text{ continua e) } f \neq 0 \text{ solo in un } I \text{ limitato} \}$

"a supporto compatto"

$$\underbrace{\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})}_{\text{sp. vett. normato con norma naturale (dell'estremo sup)}} \subseteq \underbrace{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}_{\text{sp. vett non normato}}$$

$\hookrightarrow$ Questi 3 sp. normati sono COMPLETI?

Se $\{f_n\}$ è di Cauchy in uno di questi 3 spazi:

$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f_n \to f$ unif (in norma $\mathcal{C}^0$)

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R})$ sono sp. di Banach

$\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ è uno sp. vett. normato non completo

Funzioni infinitamente derivabili

$\mathcal{C}^\infty[a,b]$ è uno sp. vett. È normato?

$\|f\|_{\mathcal{C}^0}$ $\quad \|f\|_{\mathcal{C}^1}$ $\quad \|f\|_{\mathcal{C}^k}$ $\quad \|f\|_{L^1}$

SÌ, posso renderlo normato con tante norme diverse

Ce n'è una che lo rende completo? NO

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}^0} \longrightarrow \text{diverge! (il più delle volte, e.g. } f(x) = e^x)$$

NON esiste una norma "naturale" nello spazio $C^\infty[a,b]$ che lo renda completo.

Spazio di f. infinitamente derivabili in $\mathbb{R}$

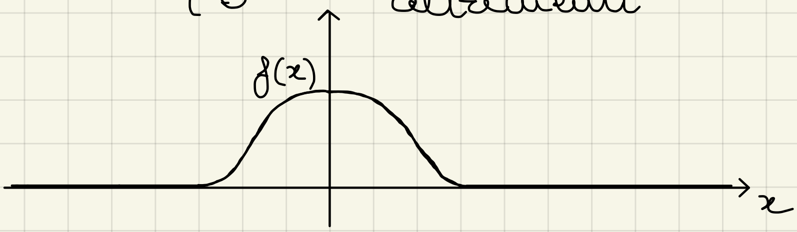
$C^\infty(\mathbb{R})$ non è normato

$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ derivabile infinite volte e a supporto compatto $\}$

→ esistono funzioni con queste proprietà?

Esempio:

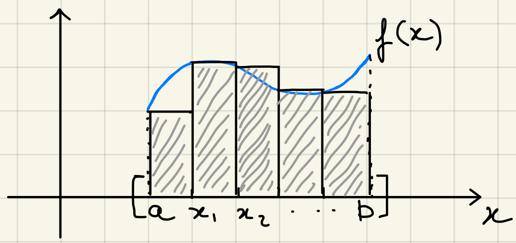
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \ \checkmark$$



$C_0^\infty(\mathbb{R})$ ha una norma? Posso mettere molte norme diverse in questo spazio, ma con nessuna di queste risulterà completo.

Integrale di Lebesgue

Integrale di Riemann:



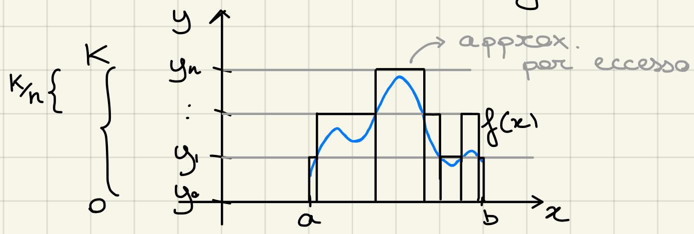
$$\left| \begin{matrix} \text{Approx. per eccesso } - \\ \text{" " difetto} \end{matrix} \right| \leq$$

$$\leq \sum |x_k - x_{k-1}| \, |\sup f - \inf f| \leq K \sum |x_k - x_{k-1}| = (b-a) K$$

Anche per funzioni fini in $[a,b]$, se la funzione f oscilla molto (ad esempio ha molti punti di discontinuità) l'errore di approssimazione potrebbe non tendere a 0.

Somme di Lebesgue :

$$s_n^- = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \left|\{x \in [a,b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}\right|$$
approx per difetto



$$s_n^+ = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \left|\{x \in [a,b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}\right|$$
approx per eccesso

$$s_n^+ - s_n^- = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) \left|\{x \in [a,b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}\right|$$

$$= \frac{K}{n} \sum |\{\ldots\}| = \frac{K}{n}(b-a) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$|\{x \in [a,b] : y_k < f(x) \leq y_{k+1}\}|$ <u>misura dell' insieme</u>

$\{x \in [a,b] : y_k < f(x) \leq y_{k+1}\}$ quest' insieme come è fatto ?

Non per forza è un intervallo.
Potrebbe essere unione di "tanti intervalli"

Per fare funzionare l'idea di Lebesgue abbiamo bisogno di saper misurare la "lunghezza" anche di sottoinsieme "complicati" della retta.

<u>es</u>: funzione di Dirichlet $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \{x \in [0,1] \mid \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

Quanto misura la lunghezza di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$?
" " " " " $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$?

Per costruire una buona teoria dell' integrazione che utilizzi l' algoritmo delle "somme di Lebesgue" abbiamo bisogno di una buona TEORIA della MISURA.

Capire cos'è la misura di un insieme anche molto complicato.

Vedremo che non tutti gli insiemi sono "misurabili".

Qual è la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ per cui può essere definita la misura ?

- Si studiano in astratto certe famiglie di sottoinsiemi di un certo insieme ambiente Ω ($= \mathbb{R}, \mathbb{R}^k \dots$)
- Si studiano certe funzioni "misura" che ad ogni insieme misurabile associano un numero
- Si studiano le funzioni ("misurabili") per cui ogni insieme del tipo $\{x \in [a,b] \mid y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\}$ è misurabile
- Si definirà l'integrale basato sulle somme di Lebesgue

Teoria della misura "alla Lebesgue"

Sia Ω un insieme qualsiasi. Sia $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme delle parti di Ω, cioè l'insieme di tutti i sotto-insiemi di Ω.

es: $\Omega = \{1,2,3\}$ $\quad \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$

$\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\quad 1 \in \Omega$, $\quad \{1\} \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\quad \{1\} \subseteq \Omega$

Def: Sia Ω un insieme qualsiasi. Si dice **σ-algebra** (in Ω) una qualsiasi famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω (cioè $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) tale che:

1) $\Omega \in \mathcal{M}$

(A^c complementare di A, $A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$)

2) $\forall A \in \mathcal{M}$ sia $A^c \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ chiusa per complementazioni)

3) $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni numerabili, cioè se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $A_n \in \mathcal{M}$ allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Esempi: La σ-algebra più piccola (per qualsiasi insieme Ω) è $\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega\}$

La σ-algebra più grande è $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$

Teorema Se $\mathcal{M}$ è una σ-algebra in Ω allora $\mathcal{M}$ è chiusa anche rispetto a:

- unioni finite
- intersezione di una succ. di insiemi o di un numero finito
- differenza insiemistica

Se Ω è un insieme e $\mathcal{M}$ una σ-algebra in Ω, $(\Omega, \mathcal{M})$ si dirà SPAZIO MISURABILE.

Gli elementi di $\mathcal{M}$ si chiameranno anche "insiemi misurabili".

Def: Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno sp. misurabile. Si dice misura su $(\Omega, \mathcal{M})$ una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tale che μ sia numerabilmente additiva, cioè:

$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $A_n \in \mathcal{M}$ si ha $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

a 2 a 2 disgiunti, cioè
$A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$

Esempi (di misure): 1. Misura del conteggio

Sia Ω qualsiasi, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mu(A) = \begin{cases} \text{se } A \text{ insieme finito, } \mu(A) = \text{n° di elementi di } A \\ \text{se } A \text{ '' infinito, } \mu(A) = +\infty \end{cases}$$

2. Misura atomica di Dirac

Sia Ω qualsiasi, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$. Fissiamo un $x_0 \in \Omega$

"Misura di Dirac centrata in x_0" $\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$

Se μ è una misura su $(\Omega, \mathcal{M})$ si dirà che $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno SPAZIO DI MISURA

Gli spazi di misura ereditano ulteriori proprietà dagli assiomi già discussi.

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura.

Supponiamo che $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$

Sia $B \subseteq A$. Posso dire che $\mu(B) = 0$?

(μ é monotona: $\forall A, B \in \mathcal{M}$, $B \subseteq A \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$ $\overset{0}{=}$)

Posso dirlo pur di sapere che B é misurabile

<u>Def</u>: sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. Si dice che la ==misura== μ è ==COMPLETA== se

$\forall A \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(A) = 0$, $\forall B \subseteq A$ si ha $B \in \mathcal{M}$ (e quindi $\mu(B) = 0$)

(μ é completa se tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla sono misurabili)

<u>Teorema</u> (esistenza della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$)

Esiste una σ-algebra $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una misura μ su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ che chiameremo misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ con le seguenti proprietà:

1. La σ-algebra $\mathcal{L}$ contiene in particolare tutti gli insiemi aperti, chiusi, le unioni e intersezioni di famiglie numerabili di aperti o chiusi. (In pratica $\mathcal{L}$ contiene tutti gli insiemi che riusciamo a definire costruttivamente. Tuttavia é noto che $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$).

2. Se $I \subseteq \mathbb{R}^n$ é una n-cella cioé: $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ allora $\mu(I) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \ldots \cdot |b_n - a_n|$.
Ne segue che la misura di Lebesgue degli insiemi elementari coincide con la misura elementare (aree di poligoni, volumi di poliedri, sfere ...).

3. μ é invariante per traslazioni.

4. La misura di Lebesgue é completa.

5. Se $E \in \mathcal{L}$, $\mu(E) = \inf\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \text{ dove } \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ sono n-celle e } \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq E\right]$

é come se ricoprissi E di rettangoli sempre più piccoli la cui unione approssimi il meglio possibile la superficie di E

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

$$\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]) = |b_1 - a_1| \times \dots \times |b_n - a_n|$$

$\mu(x) = 0 \rightarrow$ I punti hanno misura nulla

Per la numerabile additività, ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}^n$ è misurabile e ha misura (di Lebesgue) nulla.

Es: In $\mathbb{R}$: $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ è numerabile, ha misura 0
$[0,1] \cap [\mathbb{R}/\mathbb{Q}]$ per differenza, ha misura 1

In $\mathbb{R}^2$, una retta ha misura nulla (esempio in $\mathbb{R}^2$ non numerabile ma di misura 0)

In $\mathbb{R}$, esistono sottoinsiemi non numerabili ma di misura nulla?
Sì, ma non è facile fare un esempio ("insieme ternario di Cantor").

Se cambio la misura, questi esempi non sono più validi:
In $\mathbb{R}$, μ = misura del conteggio
Gli insiemi numerabili hanno misura $+\infty$ (rispetto a questa μ)

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$

Esiste un insieme non Lebesgue-misurabile?
Sì, ma non è (per niente) facile fare un esempio

Funzioni misurabili

somme integrali "alla Lebesgue"

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \, |\underbrace{\{x \in [a,b] \mid y_{k-1} \le f(x) < y_k\}}_{\circledast}|$$

ho bisogno di sapere se questo insieme è misurabile

Le funzioni misurabili, che ora definiremo, sono quelle per cui si può garantire che gli insiemi ⊛ sono misurabili, e quindi per queste funzioni potremo definire le somme integrali alla Lebesgue

Teorema Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

2) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$

3) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

Def: Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno sp. misurabile, e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Si dice che f è misurabile se soddisfa una delle 4 proprietà del teo. precedente

Se f è misurabile, ad esempio è vero anche:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid a \leq f(x) < b\} \in \mathcal{M}$$

Relazione tra insieme misurabile e funzione misurabile

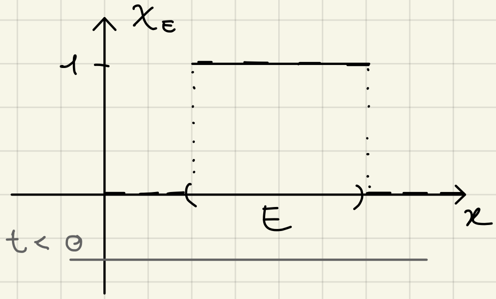
$(\Omega, \mathcal{M}) \qquad E \subseteq \Omega \qquad f(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ funzione caratteristica (o indicatrice) di E

f è misurabile?

$$\{x \in \Omega \mid \chi_E(x) > t\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \chi_E(x) > t\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } t < 0 \\ E & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \emptyset & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{M} \quad \forall\ \sigma$-algebra!

$E \in \mathcal{M} \iff \chi_E$ è misurabile



Se μ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
Allora $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$ è un insieme aperto, quindi è $\mathcal{L}$-misurabile. Perciò:

"Ogni funzione continua è $\mathcal{L}$-misurabile"

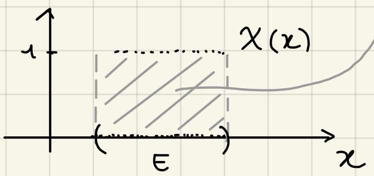
Fissato uno sp. misurabile $(\Omega, \mathcal{M})$, l'insieme delle funzioni $f: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili è chiuso rispetto a molte operazioni.

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. ...verso la def. di integrale (rispetto a una misura qualsiasi)

Vogliamo definire $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$ per $f: \Omega \to \mathbb{R}$

Andiamo per successivi passi di generalità:

1. $f(x) = \chi_E(x)$ $\qquad \int_\Omega \chi_E(x)\, d\mu(x) = \mu(E)$



(purché sia $E \in \mathcal{M}$) e quindi f sia misurabile

2. Sia $f(x) = c_1 \chi_{E_1}(x) + \dots + c_n \chi_{E_n}(x)$
con $E_1, \dots, E_n$ misurabili, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = ?$ $\quad$ Se vogliamo che l'integrale sia lineare dovrò porre

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)\Big) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n c_i \int_\Omega \chi_{E_i}(x)\, d\mu(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^n c_i\, \mu(E_i)$$

Le funzioni di questo tipo, cioè che sono combinazione lineare di un n° finito di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili si dicono "funzioni semplici"

Def: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura.
Si dice **funzione semplice** su Ω una funzione $s: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che:

1) $s(x)$ è misurabile

2) $s(x)$ assume solo un n° finito di valori distinti

In questo caso se chiamo $c_1 \dots c_n$ i valori assunti da $s(x)$ e $E_i = \{x \in \Omega \mid f(x) = c_i\}$ allora $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$ dove $E_1 \dots E_n$ sono misurabili (e assieme rappresentano una partizione di Ω).
Equivalentemente: funzione semplice è una funzione

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{con } E_1, \dots, E_n \subset \Omega \quad \text{e} \quad c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$$

3. Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile qualsiasi, l'idea è approssimarla mediante funzioni semplici (L'integrale di f sarà definito a partire dagli integrali delle funzioni semplici approssimanti). Così facendo ritroveremo l'idea di somme integrali alla Lebesgue

$$\boxed{f: \Omega \to [0, +\infty) \text{ misurabile}}$$

Teorema (di approssimazione)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura e sia $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora $\exists$ una successione $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ di funzioni semplice $s_k: \Omega \to [0, +\infty)$ tali che

$$\underbrace{s_k(x) \nearrow f(x)}$$ per $k \to +\infty$

$$\begin{cases} s_k(x) \to f(x) & \text{per (q.o.) } x \in \Omega \text{ e } k \to +\infty \\ s_k(x) \leq s_{k+1}(x) & \forall x \in \Omega \ \forall k \end{cases}$$

Inoltre se la f è limitata $s_k \to f$ uniformemente in Ω.

Def Se $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega s_k(x)\, d\mu(x)$$ con $\{s_k\}$ come nel teo. precedente

(Questo limite $\exists$ sempre, finito o infinito)

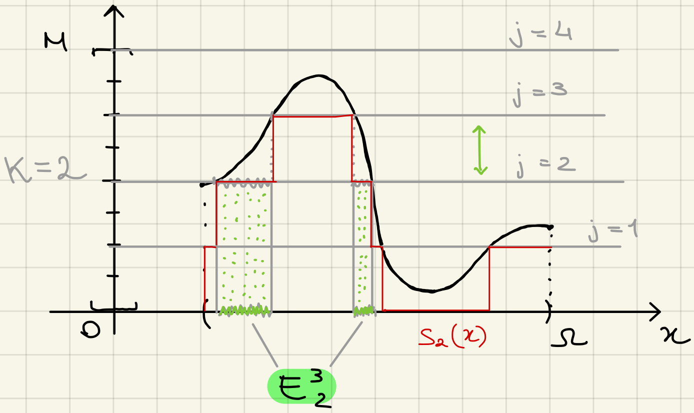
Quindi $\forall f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile $\exists \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) \in [0, +\infty]$ (l'integrale di una funzione misurabile e non negativa esiste sempre, finito o infinito)

Più in generale risulta:

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \sup\left\{ \int_\Omega s(x)\,d\mu(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} s:\Omega\to[0,+\infty) \text{ semplice} \\ \text{e } s(x)\le f(x) \;\forall x\in\Omega \end{array} \right\}$$

<u>Dimostrazione</u> del teo. di approssimazione, nel caso di f limitata, cioè: $\quad f:\Omega\to[0,M] \quad M>0$

Diciamo come si costruiscono esplicitamente le $s_k(x)$



Al passo k della costruzione, divido il codominio $[0,M]$ in 2^k parti uguali

$$j = 1, 2, \dots, 2^k$$

$$E_k^j = \left\{ x\in\Omega \;\middle|\; \frac{M}{2^k}(j-1) \le f(x) < \frac{M}{2^k}\, j \right\}$$

$$s_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{2^k}(j-1)\,\chi_{E_k^j}(x) \qquad (s_k \le f)$$

$$0 \le f(x) - s_k(x) \le \frac{M}{2^k} \longrightarrow 0 \quad \text{per } k\to+\infty$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x\in\Omega} |f(x) - s_k(x)| \le \frac{M}{2^k} \quad \text{c'è convergenza uniforme!}$$

suddividere l'intervallo $[0,M]$ in 2^k parti uguali significa che al passo k posso tenere ancora valide le divisione fatte al passo $k-1$ (semplifica il lavoro dell'algoritmo)

(Questo nel caso f limitato. Se f è illimitato l'algoritmo va modificato.)

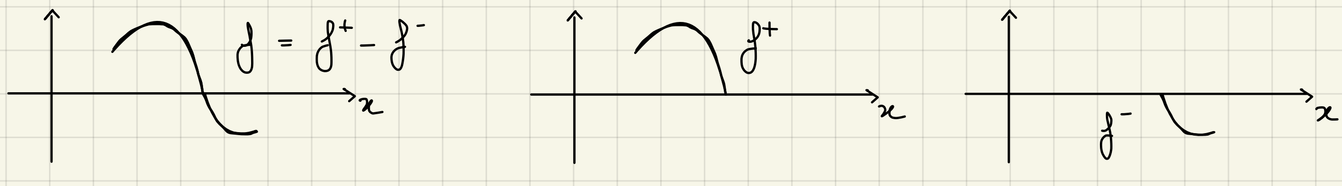
$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega s_k(x)\,d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{2^k}(j-1)\,\mu(E_k^j)}$$

Questo consente di definire l'integrale di una qualsiasi funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$ misurabile e <u>non negativa</u>
(<u>NB</u>: questo integrale può essere finito o infinito)

<u>es</u>: $\chi_{\mathbb{Q}}$ funzione di Dirichlet $\quad \displaystyle\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = \mu([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$

è numerabile

4. Cosa si fa se $f:\Omega\to\mathbb{R}$ misurabile di segno <u>qualsiasi</u>?



$$f^+(x) = \max(f(x),0) \qquad f^-(x) = \max(-f(x),0)$$

f^+ e f^- sono misurabile e ≥ 0 quindi $\exists \int_\Omega f^+(x)d\mu(x)$ e $\int_\Omega f^-(x)d\mu(x)$ (finiti o infiniti)

$$\int_\Omega f(x)d\mu(x) := \int_\Omega f^+(x)d\mu(x) - \int_\Omega f^-(x)d\mu(x)$$

Def: Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile. Si dice che é integrabile se $\int_\Omega |f(x)|d\mu(x) < +\infty$. In tal caso si pone:

$$\boxed{\int_\Omega f(x)d\mu(x) = \int_\Omega f^+(x)\,d\mu(x) - \int_\Omega f^-(x)d\mu(x)} \in \mathbb{R}$$

questo implica che siano finiti

$f^+ \leq |f| \qquad f^- \leq |f|$

Ovvero, si dice che f è integrabile se:

1. f è misurabile
2. $\int_\Omega |f(x)|d\mu(x) < +\infty$

NB: f misur. $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $|f|$ misur.

es: sia $E \subseteq \Omega$ NON misurabile. Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ -1 & x \notin E \end{cases}$

$\to$ f NON è misurabile perché ad esempio $\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} = E$ non è misurabile. Però $|f(x)| = 1$ è misurabile!

5. $f: \Omega \to \mathbb{C}$

$f(x) = \mathrm{Re}[f(x)] + i\,\mathrm{Im}[f(x)]$

Idea: $\int_\Omega f(x)d\mu(x) = \int_\Omega \mathrm{Re}[f(x)]d\mu(x) + i\int_\Omega \mathrm{Im}[f(x)]d\mu(x)$ $\boxplus$

Def: si dice che $f: \Omega \to \mathbb{C}$ é integrabile se $\mathrm{Re}f$ e $\mathrm{Im}f$ sono misurabili e $\int_\Omega |f(x)|d\mu(x) < +\infty$.

In questo caso si pone $\boxplus$

Oss: caso particolare. Se $\mu(\Omega) < +\infty$ e f è misur. e limitata, certamente f è integrabile

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega$$

$$\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) \leq M\mu(\Omega) < +\infty$$

Ad esempio, per l'integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}$, se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata, f è Lebesgue - integrabile.

es: la f. di Dirichlet è L-integrabile in (a,b) ma non R-integrabile!

$$\int_a^b \chi_\mathbb{Q}(x)\, d\mu(x) = 0$$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura (misura completa)

$$L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = L^1(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ misur. e } \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) < +\infty \}$$

$L^1(\Omega)$ è uno sp. vettoriale.

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) \quad \text{è una norma ?}$$

Proprietà della norma:

3. Disug. triang. $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f(x) + g(x)|\, d\mu(x) \leq \int_\Omega \{|f(x)| + |g(x)|\}\, d\mu(x) = \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) + \int_\Omega |g(x)|\, d\mu(x)$$

x la monotonia dell'integrale di L

x la linearità dell'integrale di L

ossia $\|f+g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

2. Omogeneità $\lambda \in \mathbb{C}$ $\|\lambda f\|_{L^1} =$

$$= \int_\Omega |\lambda| |f(x)|\, d\mu(x) = |\lambda| \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = |\lambda| \|f\|_{L^1}$$

1. Annullamento

$$\|f\|_{L^1} = 0 \to \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in \Omega$$ *

questa norma non soddisfa la proprietà di annullamento

Introduciamo nello sp. vett. $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ una relazione d'equivalenza dicendo:

$f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $\quad f \sim g$ (f equivalente a g) se $f(x) = g(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ *

(es: per la misura di Lebesgue $\chi_\mathbb{Q} \sim 0$)

Si verifica che la relazione "$\sim$" soddisfa le proprietà.

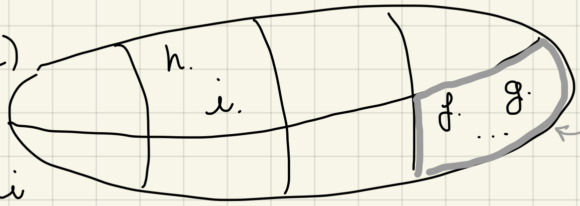
1. Riflessiva $\quad \forall f \in L^1(\Omega) \quad f \sim f$

2. Simmetrica $\quad \forall f \in L^1(\Omega) \quad f \sim g \Rightarrow g \sim f$

3. Transitiva $\quad \forall f, g, h \in L^1(\Omega) \quad f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$

Si dice che $\sim$ é una relazione d'equivalenza in $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.
$L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ risulta suddiviso in classi d'equivalenza

$L^1(\Omega)$



$h \sim i$
ma
$h \nsim f$

$\{f\} :=$ classe d'equivalenza a cui appartiene f, cioé:

$$\{f\} = \{g \in L^1 \mid g \sim f\}$$

Es: $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue

$$\{0\} = \{f \in L^1 \mid f(x) = 0 \text{ q.o.}^*\}$$
$$= \{\chi_{\mathbb{Q}}, \chi_{\{1,2,3\}}, \ldots\}$$

* q.o. sta per "quasi ovunque" o "quasi ogni" e significa tranne che in un insieme di misura nulla

Considero ora, invece che lo spazio $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ delle funzioni integrabili, lo spazio delle classi d'equivalenza delle funzioni integrabili:

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = \{\{f\} \mid f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)\}$$

Anche $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é uno sp. vettoriale.

$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é uno sp. vett. con la norma:

$$\|\{f\}\|_{\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)} = \int_\Omega |f(x)| \, d\mu(x)$$

$$\|\{f\}\|_{\mathcal{L}^1} = 0 \implies \int_\Omega |f(x)| \, d\mu(x) = 0 \implies f(x) = 0 \text{ q.o.}$$

$$\updownarrow$$

$$!\ \{f\} = \{0\}\ ! \longleftarrow f \sim 0$$

questo é lo zero dello sp. vett.!

Si verifica che $(\mathcal{L}^1, \|\{\ldots\}\|)$ é uno sp. vett. normato.

Altre proprietà dell' integrale di Lebesgue

→ Additività rispetto all' insieme di integrazione

$$\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x) \quad \text{purché } A\cap B=\emptyset$$

→ Per l' integrale di Lebesgue vale anche una proprietà di numerabile additività

↓

Teorema Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti. Sia $f: \Omega \to [0,+\infty)$ misurabile. Allora:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,d\mu(x)$$

dove ognuno dei 2 (membri può essere) finito o no

Conseguenza: definiamo una nuova funzione d' insieme $\nu: \mathcal{M} \to [0,+\infty]$

$$\forall E \in \mathcal{M} \quad \nu(E) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$$

Teorema Questa ν è una misura su $(\Omega, \mathcal{M})$

Dim ν è numerabilmente additiva se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$ $E_n \cap E_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$

quindi ν è una misura

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,d\mu(x)$$

per il teo. precedente

Es: $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$ $\quad f(x) = e^{-x^2}$

$\nu(E) = \int_E e^{-x^2}\,dx \quad \forall E \in \mathcal{L}$ "misura gaussiana"

La misura definita col procedimento precedente

$\nu(E) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$ si dice misura con peso f o con densità f (rispetto alla misura μ)

Si scrive $d\nu = f(x)\,d\mu$

Teorema Se $d\nu = f(x)\,d\mu$ allora per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile

$$\int_\Omega g(x)\,d\nu(x) = \int_\Omega g(x)\,f(x)\,d\mu(x)$$

Es: sulla retta, $d\nu = e^{-x^2}dx$. $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-x^2}d\mu(x)$

Confronto tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

1. Integrale di Riemann. Si considerino funzioni $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, e f limitata

Quali sono le funzioni Riemann-integrabili?
Ad es, se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora è R-integrabile
se f è limitata e continua a tratti, allora è R-int.
Ma più in generale? Si riesce a caratterizzare l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili?

Teorema Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora f è Riemann-integrabile se e solo se f è continua q.o., cioè se e solo se l'insieme di punti in cui f è discontinua ha misura di Lebesgue nulla

es: la funz di Dirichlet non è Riemann-int. perché è discontinua ovunque

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata, allora f è Lebesgue-integrabile se e solo se è misurabile.

Quindi: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata, allora f R-int $\overset{\cancel{\Leftarrow}}{\Rightarrow}$ f L-int (con lo stesso integrale)

Integrale di Riemann generalizzato (ad es. su $(0,+\infty)$)

Sia $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia R-int su ogni intervallo di tipo $(0,K)$. Si dice che è R-int in senso generalizzato se esiste finito $\lim_{K\to+\infty} \int_0^K f(x)\,dx$.

Sia $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia misurabile. Si dice che è L-int se esiste finito $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$

Esistono esempi di funzioni che hanno int. di Riemann generalizzato convergente e integrale di Lebesgue divergente. Questo è possibile solo con funzioni che cambiano segno infinite volte.
Se invece l'integrale generalizzato di Riemann $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ allora f è anche Lebesgue - integrabile.

Integrazioni per successioni di funzioni

Problema: $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura

$f_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad n = 1,2,3\dots \quad f_n \in L^1(\Omega)$

$f_n \to f$ puntualmente q.o. in Ω

È vero che $\int_\Omega f_n(x)\,d\mu(x) \longrightarrow \int_\Omega f(x)\,d\mu(x)$?

(Nella teoria di Riemann si richiedeva che $f_n \to f$ uniformemente)

* per semplicità di espressione indichiamo con L^1 lo sp. vett. normato di funzioni con norma $\|\cdots\|_{L^1}$ invece che con L^1 (che è uno sp. vett. normato di classi di funzioni)

Teorema di Lebesgue (della convergenza dominata)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura (μ completa).

Siano $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili e supponiamo che $\exists\, f : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ per $n \to +\infty$ q.o. in Ω

Supponiamo che $\exists\, g \in L^1(\Omega)$* t.c. $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall n$ e per q.o. $x \in \Omega$.

Allora le f_n sono integrabili, la f è integrabile,

$\boxed{\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,d\mu(x) \longrightarrow 0}$ per $n \to +\infty$ e in particolare

$\Longrightarrow \int_\Omega f_n(x)\,d\mu(x) \longrightarrow \int_\Omega f(x)\,d\mu(x)$

maggiorante integrabile o dominante integrabile

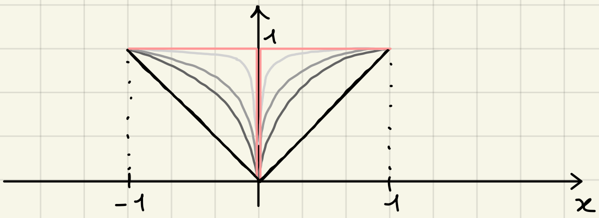
Conseguenze: f_n misurab. e $f_n \to f$ q.o. $\Longrightarrow$ f misurab.

$|f_n(x)| \le g(x)$ per q.o. x, $g \in L^1(\Omega) \Longrightarrow f_n \in L^1(\Omega)$

$\left(\int |f_n(x)|\,d\mu(x) \le \int_\Omega g(x)\,d\mu(x) < +\infty\right)$

$|f(x)| \le g(x)$ per q.o. $x \Longrightarrow f \in L^1(\Omega)$

Es: $f_n(x) = |x|^{1/n}$ $\quad x \in [-1,1]$



$$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

oppure

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \text{ q.o.}$$

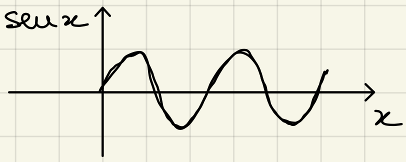
$$f_n(x) \leq |f_n(x)| \leq \underset{g(x)}{\overset{\shortparallel}{1}} \in L^1[-1,1] \implies \int_{-1}^{1} |f_n(x) - 1|\, dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

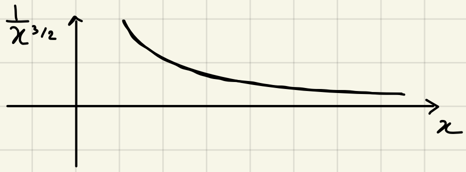
$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2$$

Nella teoria di Riemann:

$f_n \to f$ NON unif. quindi NON posso applicare il teo. di conv. degli integrali di Riemann.

Es: $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n\, x^{3/2}}$ $\quad x \in (0,+\infty)$





n fissato, per $x \to 0$ $\quad f_n(x) \sim \dfrac{nx}{n x^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ integrab. in $(0,1)$

per $x \to +\infty$ $\quad \left| \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n x^{3/2}} \right| \leq \dfrac{1}{n x^{3/2}}$ integrab. a $+\infty$

x fissato, per $n \to +\infty$ $\quad f_n(x) \to 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

É vero che $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x) - 0|\, dx \longrightarrow 0$?

Posso applicare il teo. di Lebesgue? Devo cercare una maggiorante integrabile $g(x)$

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$ integrabile in $(1,+\infty)$ ma non in $(0,1)$

Per $x \in (0,1]$ $\quad \left| \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n x^{3/2}} \right| \leq \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}x^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$|\operatorname{sen} t| \leq |t| \quad \forall t$ $\quad \Longrightarrow g(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & x \in (0,1] \\ \dfrac{1}{x^{3/2}} & x \in (1,+\infty) \end{cases}$

g é pure continua, anche se non é richiesto dal teo. di Lebesgue

$f_n(x) \leq g(x) \in L^1(\Omega) \quad \forall n \quad \forall x \in (0,+\infty) = \Omega$

$\Longrightarrow$ posso applicare il teo. di Lebesgue: $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Teorema   Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura (μ completa)
L^1 é uno sp. vett. normato completo.

conseg. del teo. di Lebesgue

(Questo é uno sp. di Banach "naturale" di funzioni integrabili)

Applicazione del teo. della convergenza dominante:
proprietá degli integrali dipendenti da un parametro

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura e consideriamo una funzione definita da:

$$f(x) = \int_\Omega k(x,y)\, d\mu(y) \qquad x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}, \quad y \in \Omega$$

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ f é ben definita purché, $\forall x \in (a,b)$ fissato, la funzione $y \mapsto k(x,y)$ é integrab. in Ω

y variabile
x parametro

Esempi: • trasformata di Fourier di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) = \int_\mathbb{R} f(y)\, e^{-2\pi i x y}\, dy$$

• trasformata di Laplace di $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} f(t)\, dt$$

In generale: ho una funzione

$$f(x) = \int_\Omega k(x,y)\, d\mu(y) \qquad x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}, \quad y \in \Omega$$

Mi chiedo: f é continua? (1) f é derivabile? Come si calcola $f'(x)$? (2)

(1) Proviamo a dimostrare che f é cont. in $x_0 \in (a,b)$ e vediamo quali ipotesi occorre fare.

Ts: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ Prendiamo una generica successione $\{x_n\} \subseteq (a,b)$, $x_n \to x_0$ e proviamo che $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega k(x_n,y)\,d\mu(y) = \int_\Omega k(x_0,y)\,d\mu(y)$$

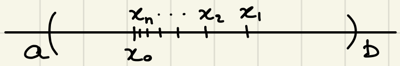
(problema del passaggio del lim dentro l'integrale)

<u>Hp</u>: $k(x,y)$ $\quad \forall x$ fissato, $k(x,\cdot)$ è misurab.
$(y \mapsto k(x,y)$ è misurab. in $(\Omega,\mathcal{M},\mu))$

$$K_n(y) = k(x_n,y) \xrightarrow{n\to+\infty} k(x_0,y) = K(y) \ ?$$

→ Per q.o. $y\in\Omega$ $\quad x \mapsto k(x,y)$ deve essere cont. in x_0.

Voglio che $\exists\ g(x) \in L^1(\Omega)$ t.c. $|k(x_n,y)| \leq g(y)$ $\ \forall y\in\Omega$, $\forall n$



ossia: → $|k(x_n,y)| \leq g(y) \in L^1(\Omega)$ $\ \forall y \in\Omega$ $\forall n$, e $\forall x$ in un intorno di x_0

→ <u>Teorema</u> (continuità degli integrali dipendenti da un parametro)

Sia $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ uno sp. di misura, $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ e sia $k(x,y): (a,b)\times\Omega \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $\forall x\in(a,b)$ $\quad k(x,\cdot)$ è misurabile in Ω

2) Per q.o. $y\in\Omega$ $\quad k(\cdot,y)$ è continua in x_0

3) $\exists\ g\in L^1(\Omega)$ e $\exists$ un intorno di x_0, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ t.c.
$|k(x,y)| \leq g(y)$ $\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ per q.o. $y\in\Omega$

Allora $\quad f(x) = \int_\Omega k(x,y)\,d\mu(y)$ è continua in x_0

<u>Es</u>: $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i x y}\,dy \qquad f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f\in L^1(\mathbb{R})$

$\hat{f}$ è ben definita e continua?

$y \mapsto f(y)e^{-2\pi i x y}$ è misurab. in $\mathbb{R}$ $\ (\forall x$ fissato)
$x \mapsto f(y)e^{-2\pi i x y}$ è cont. in $\mathbb{R}$ $\ (\forall y$ fissato)

$|f(y)e^{-2\pi i x y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f}$ è ben definita e $\hat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$

2 $\quad f(x) = \int_\Omega k(x,y)\,d\mu(y)$. $\quad$ <u>f è derivabile</u>?
Come si calcola <u>$f'(x)$</u>?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Sia $h_n \to 0$ e consideriamo

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \overset{\uparrow \text{ x def. di } f \text{ e lin. dell'integr.}}{=} \int_\Omega \underbrace{\frac{[K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)]}{h_n}}_{F_n(y)} d\mu(y)$$

$$\int_\Omega F_n(y)\, d\mu(y) \longrightarrow ???$$

$$F_n(y) = \frac{K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)}{h_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\partial K}{\partial x}(x_0,y) \quad \text{se } \exists\ \frac{\partial K}{\partial x} \text{ in } x_0$$

Per applicare il teo. di Lebesgue devo trovare una maggiorante integrale $g(y)$

$$\left| \frac{K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)}{h_n} \right| \leq g(y) \in L^1(\Omega) \quad \text{per q.o. } y\in\Omega \ \forall n$$

Applichiamo il teo. di Lagrange a K rispetto alla variabile x.

$\forall y \in \Omega$ fissato $\exists\ \bar{x}_n \in [x_0, x_0+h_n]$ t.c.

$$\frac{K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)}{h_n} = \frac{\partial K}{\partial x}(\bar{x}_n,y)$$

Se sapessi che $\exists\ g \in L^1(\Omega)$ e un intorno di x_0

$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ t.c. $\left|\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\right| \leq g(y)$ per q.o. $y\in\Omega$ e $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

potrei applicare il teo. di Lebesgue e concludere che

$$\int_\Omega \frac{K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)}{h_n} d\mu(y) \longrightarrow \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial K(x_0,y)}{\partial x} d\mu(y)}_{f'(x_0)}$$

Teorema (derivazione degli integrali dipendenti da un parametro)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$
$K: (a,b)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

1) $\forall x \in (a,b)$ $K(x,\cdot)$ é $L^1(\Omega)$

2) Per q.o. $y\in\Omega$ e $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\exists\ \frac{\partial K}{\partial x}(x,y)$

3) $\exists\ g \in L^1(\Omega)$ t.c. $\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y)$ per q.o. $y\in\Omega$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Allora $\exists\, f'(x_0) = \int_\Omega \frac{\partial K}{\partial x}(x_0,y)\, d\mu(y)$,

anzi $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\exists\, f'(x) = \int_\Omega \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\, d\mu(y)$.

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\qquad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy$

$\hat{f}$ é definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

Se $\hat{f}$ <u>é derivabile</u>, $\hat{f}' = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y) e^{-2\pi i x y}\right] dy$

$= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad y \mapsto f(y) e^{-2\pi i x y}$ sia $L^1(\mathbb{R})$ e $|f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

2) $\exists\, \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y) e^{-2\pi i x y}\right] = -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

3) $\exists\, g \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $\left|\underbrace{-2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}}_{2\pi |y| |f(y)|}\right| \leq g(y)$

$2\pi |y| |f(y)| = g(y)$

<u>Conclusione</u>: sapevamo giá che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$.
Ora sappiamo che se anche $|y| f(y) \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\exists\, \hat{f}'(x) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy$

<u>Esempi</u>: • $f(y) = \frac{1}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$

$|y| f(y) = \frac{|y|}{1+y^2} \notin L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow$ $\hat{f}$ sará continua, ma non é detto che sará derivabile

$f(y) = \frac{1}{1+y^4} \in L^1(\mathbb{R})$

$|y| f(y) = \frac{|y|}{1+y^4} \in L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow$ In questo caso, $\hat{f}$ é continua e derivabile

Altri spazi di funzioni integrabili. Spazi $L^p(\Omega)$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura (μ completa).

Diciamo che $f \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ per un certo $p \in (0, +\infty)$ (anche non intero) se

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile e $\int_\Omega |f(x)|^p\, d\mu(x) < +\infty$

↳ (funzioni "p-sommabili")

- $L^p(\Omega)$ è uno sp. vettettoriale?

$f, g \in L^p(\Omega)$ $\quad |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p$$

Se $p \in (0,+\infty)$ e invece $|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$?

$p \in (0,1) \Rightarrow (a+b)^p \leq a^p + b^p \quad a, b \geq 0$

$p > 1 \Rightarrow (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \Longrightarrow |f(x)+g(x)|^p \leq \begin{cases} |f(x)|^p + |g(x)|^p & p \in (0,1) \\ 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p) & p > 1 \end{cases}$

In ogni caso, integrando in Ω le disug. precedenti ottengo che

$$f, g \in L^p \Longrightarrow f+g \in L^p$$

$\Longrightarrow L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno sp. vettoriale, $\forall p \in (0,+\infty)$

- $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (L^p) è normato?

$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}$? $\longrightarrow$ NO (non rispetta l'omogeneità)

$\left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p}$? $\longrightarrow$ FORSE, devo verificare che soddisfi la disug. triang.

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)| d\mu(x) \leq \begin{cases} \int_\Omega |f|^p + \int_\Omega |g|^p & p \in (0,1) \\ (2^{p-1})\left(\int_\Omega |f|^p + \int_\Omega |g|^p\right) & p > 1 \end{cases}$$

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \left\{\begin{matrix} \left(\int_\Omega |f|^p + \int_\Omega |g|^p\right)^{1/p} & p \in (0,1) \\ (2^{p-1})^{1/p}\left(\int_\Omega |f|^p + \int_\Omega |g|^p\right)^{1/p} & p > 1 \end{matrix}\right\} \leq C(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$$

non viene per forza 1

Devo cercare un altro modo per dimostrare che questa è una norma

Teorema (disuguaglianza di Minkowsky)

Per $p \geq 1$, $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$ ossia:

gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ (L^p) sono sp. vett. normati per $p \in [1,+\infty)$.

Per $p \in (0,1)$, la "norma L^p" non è una norma valida.

Se, per $p \in (0,1)$, definiamo $d(f,g) = \int_\Omega |f-g|^p$, questa è una distanza.

Perciò gli spazi L^p con $p \in (0,1)$ sono esempi di sp. vett. metrici ma non normati

<u>Teorema</u> $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $p \geq 1$ sono sp. di Banach

<u>Esempi</u>: $L^p(\mathbb{R})$ con la μ di Lebesgue

- $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|} \in C^0_*(\mathbb{R})$ $\quad f \notin L^1(\mathbb{R})$

  ma $|f(x)|^p = \left(\dfrac{1}{1+|x|}\right)^p$ è integrabile per $p>1$

  $\longrightarrow$ $f \in L^p(\mathbb{R})$ $\forall p > 1$ ma non $p = 1$

- $f(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{x^{1/3}}$ è illimitata per $x \to 0$

  $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\qquad |f(x)|^p = \dfrac{e^{-p|x|}}{|x|^{p/3}}$ è ancora integrab. $x \to +\infty$
  ed è anche " $x \to 0$
  purché $\frac{p}{3} < 1 \Rightarrow p < 3$

  $\longrightarrow$ $f \in L^p(\mathbb{R})$ per $1 \leq p < 3$!

Questi due esempi mostrano che: $p_1 < p_2 \;\not\Rightarrow\; L^{p_1} \subseteq L^{p_2}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; \not\Rightarrow\; L^{p_2} \subseteq L^{p_1}$

$\rightarrow$ Tra spazi L^p con p diversi non valgono inclusioni banali
in $\mathbb{R}$

$L^\infty(\Omega)$ spazio delle **funzioni "essenzialmente limitate"**

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura (μ completa).

Si dice che $f \in L^\infty(\Omega)$ se f è misurabile e $\exists K > 0$ t.c.

$$|f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega$$

In questo caso definiremo $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{sup\,ess}_{x \in \Omega} |f(x)|$

$$= \inf\{K > 0 \mid |f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega\}$$

Equivalentemente: $f \in L^\infty(\Omega)$ se f é uguale q.o. in Ω a una funzione g limitata. In tal caso

$$\operatorname{supess}_{\Omega} |f(x)| = \sup_{\Omega} |g(x)|$$

Se $f \in L^\infty(\Omega)$ allora $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ per q.o. $x \in \Omega$

Sono funzioni $L^\infty(\Omega)$:
1) le funz. misurabili e limitate
2) " " " " uguali q.o. a una funz. limitata

Teorema $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é uno sp. vett. normato completo.

$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$, $p \geq 1$

$\|f \cdot g\|_{L^p} \leq$ a qualcosa ???

Def Si dice che due numeri $p, q \in (1, +\infty)$ sono esponenti coniugati se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Es: $p = 3 \to \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \implies q = \frac{3}{2}$

$q = \frac{p}{p-1}$ $\to$ se $p \to 1^+$ allora $q \to +\infty$
e se $p \to +\infty$ allora $q \to 1^+$

$\implies$ 1 e $+\infty$ sono esponenti coniugati $(p, q \in [1, +\infty])$

Teorema (disuguaglianza di Hölder)
Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. Siano $p, q \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati.
Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ allora $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Caso particolare: $p = q = 2$, $\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}$
disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

In $\mathbb{R}^n$: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

$$\int_\Omega |f(x)\cdot g(x)|\,d\mu(x) \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |g(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}$$

La disug. (integrale) di Cauchy-Scwartz é una generalizzazione ∞-dimensionale della disug. elementare del prodotto scalare

Conseguenza:

relazioni di inclusione tra spazi L^p per diversi esponenti p.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0,1) \quad \text{ma} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(0,1)$$
$$\frac{1}{x} \in L^2(1,+\infty) \quad \text{ma} \quad \frac{1}{x} \notin L^1(1,+\infty)$$

Se $f(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$ allora $|f(x)|^p$ tenderá a zero più velocemente (all'infinito, aumentare l'esponente migliora le cose)

Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$ allora $|f(x)|^p$ tenderá all'infinito più velocemente (al finito, nei punti in cui f é illimitata, aumentare l'esponente peggiora le cose).

Teorema (inclusioni tra spazi L^p su insiemi di misura finita)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$ e siano $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$.

Allora $\mathcal{L}^{p_1}(\Omega) \supseteq \mathcal{L}^{p_2}(\Omega)$ e $\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$

Dim: sia $f \in L^{p_2}(\Omega)$, voglio dimostrare che $\int_\Omega |f(x)|^{p_1} d\mu(x) < +\infty$

$$\int_\Omega |f(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_\Omega |f(x)|^{p_1} \cdot 1\, d\mu(x)$$

Applico la disug. triang. di Holder a $|f|^{p_1}$ e 1:
scelgo $p = \frac{p_2}{p_1} > 1$ e sia q l'esp. coniugato di p.

$|f|^{p_1} \in L^p$ perché $\int_\Omega (|f(x)|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu(x) < +\infty$ poiché $f \in L^{p_2}$

$$\leq \left(\int_\Omega (|f(x)|^{p_1})^{p_2/p_1} d\mu(x) \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \left(\int_\Omega 1^q d\mu(x) \right)^{1/q} \qquad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - p_1/p_2$$

$\mu(\Omega) < +\infty$

$$= \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2} d\mu(x) \right)^{p_1/p_2} \cdot \mu(\Omega)^{1-\frac{p_1}{p_2}}$$

Elevando a $\frac{1}{p_1}$ ottengo: $\left(\int_\Omega |f(x)|^{p_1} d\mu(x)\right)^{1/p_1} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2} d\mu(x)\right)^{1/p_2} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$

$$\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

(Il teo. dice che se il secondo membro finito lo è anche il primo)

Integrali doppi (di Lebesgue)

Consideriamo funzioni $f(x,y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile

Sotto quali ipotesi valgono uguaglianze del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{\text{misura di Lebesgue in } \mathbb{R}^{2n}}$$

Teorema (di Fubini - Tonelli)

Sia $f(x,y): \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile.

1) Se $f(x,y) \geq 0$ in $\mathbb{R}^{2n}$ allora valgono le uguaglianze

$$\circledast \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x,y)\, dx\,dy$$

dove ognuno dei termini può essere finito o meno.

2) Se f ha segno qualsiasi (o è complessa) e un integrale iterato di $|f(x,y)|$ è finito, allora vale $\circledast$ per $|f|$ e anche per f, e questi integrali sono finiti

3) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ allora valgono le conclusioni del p.to 2.

Es: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y^2} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^2)$?

$f \geq 0$ in $\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ applico il p.to 1

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{x+y^2} \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x}} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{\pi/2}{\sqrt{x}} + \frac{\pi/2}{\sqrt{x}} \right] dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \pi \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2\pi$$

Convoluzione di due funzioni

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabili, si definisce **convoluzione** di f e g, e si scrive $f * g$, la funzione

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy}$$

(purché l'integrale converga, almeno per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$)

Teorema Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, in particolare $|(f*g)(x)| < +\infty$ per q.o. x. Vale:

$$\| f*g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \, \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Dim: voglio dimostrare che $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy \right| dx < +\infty$$

(supponendo $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ misurabile)

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx \right) dy$$

teo. di Fubini-Tonelli (integr. iter. di $|f(x-y)\,g(y)| \geq 0$)

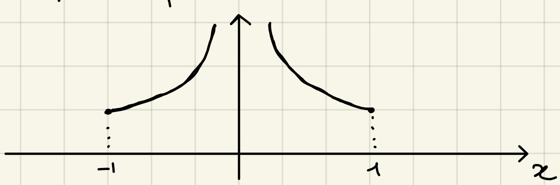
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\,dz \right) dy$$

$x - y = z, \quad dx = dz$

$$= \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{ per ipotesi}$$

Es: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ $\quad f*g$ é finita per q.o. x, non $\forall x$

$$f(x) = g(x) = \frac{\chi_{(-1,1)}}{\sqrt{x}}$$



$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

$$(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)^2\,dy = \int_{-1}^1 \frac{dy}{|y|} = +\infty$$

in $x=0$ la convoluzione non é finita, ma solo per $x=0$; sará finita per q.o. x

Proprietà della convoluzione

- commutativa $\quad f*g = g*f$
- associativa $\quad (f*g)*h = f*(g*h)$

in $\mathbb{R}$, se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ simmetriche, vale la tabella:

$f*g$	f pari	f dispari
g pari	$f*g$ pari	$f*g$ dispari
g dispari	$f*g$ dispari	$f*g$ pari

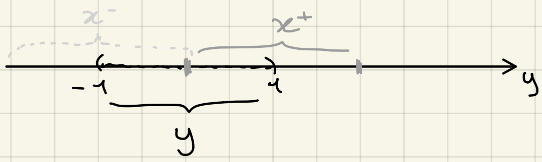
Es: $\quad f(x) = g(x) = \chi_{(-1,1)}(x) \qquad f*g = ?$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x-y) \cdot \chi_{(-1,1)}(y)\, dy = \int_{-1}^{1} \chi_{(-1,1)}(x-y)\, dy$$

Poiché f e g sono pari, anche $f*g$ è pari. Allora posso calcolarla solo per $x \geq 0$ e poi "simmetrizzarla".

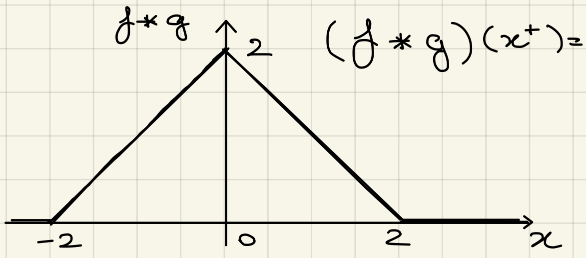
$-1 < y < 1 \qquad \chi_{(-1,1)}(x-y) \neq 0$ per $-1 < x-y < 1 \qquad \boxed{x \geq 0}$

$x-1 < y < x+1$



$\Rightarrow 0 < x < 2$, se $x > 2 \to x-y > 1 \to \chi_{(-1,1)} = 0$

$\to$ la convoluzione è nulla



$$(f*g)(x^+) = \begin{cases} 0 < x < 2, & \int_{x-1}^{1} dy = 1-(x-1) = 2-x \\ x > 2, & 0 \end{cases}$$

Esercizi:

- Per quali $p \in [1, +\infty]$ è $f \in L^p(\mathbb{R})$?

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|^{1/2}\,(1+|x|^{1/3})}$$

f def. per $x \neq 1$, cont. per $x \neq 1$.

Eventuali problemi di integrab. sono vicini a 1 e ∞.

Per $x \to 1$ $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{2\,|x-1|^{1/2}}$

$|f(x)|^p$ è integrab. vicino a 1 se lo è $\dfrac{1}{|x-1|^{p/2}}$
ossia per $p/2 < 1$ cioè $\boxed{p < 2}$

Per $x \to \infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{|x|^{1/2 + 1/3}} = \dfrac{1}{|x|^{5/6}}$

$|f(x)|^p$ integrab. all'infinito se lo è $\dfrac{1}{|x|^{\frac{5}{6}p}}$
cioè $\frac{5}{6} p > 1 \longrightarrow \boxed{p > \frac{6}{5}}$

Perciò $f \in L^p(\mathbb{R}) \iff p \in \left(\frac{6}{5}, 2\right)$

- Calcolare $\underbrace{\dfrac{1}{1+x^2}}_{\substack{L^1(\mathbb{R}) \\ \text{pari}}} * \underbrace{x \cdot \chi_{(-1,1)}(x)}_{\substack{L^1(\mathbb{R}) \\ \text{dispari}}} \Longrightarrow \in L^1(\mathbb{R})$ dispari

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-y)^2}\, y\, dy =$$
$$= \left[\frac{1}{2} \ln\left[1+(y-x)^2\right] \right]_{-1}^{1} + x \left[\operatorname{arctg}(y-x) \right]_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+(1-x)^2}{1+(1+x)^2} \right] + x \left[\operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg}(1+x) \right]$$

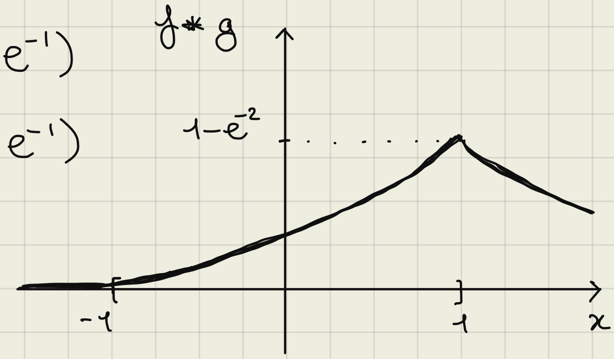
- $\underbrace{e^{-x} \chi_{(0,+\infty)}(x)}_{L^1(\mathbb{R})} * \underbrace{\chi_{(-1,1)}(x)}_{L^1(\mathbb{R})} \Longrightarrow \in L^1(\mathbb{R})$

$$(f*g)(x) = \int_{-1}^{1} e^{-(x-y)} \chi_{(0,+\infty)}(x-y)\, dy =$$
$$= e^{-x} \int_{-1}^{1} e^{y} \chi_{(0,+\infty)}(x-y)\, dy$$

$\chi_{(0,+\infty)}(x-y) \neq 0$
$\downarrow$
$x - y > 0 \longrightarrow y < x$
ma $-1 < y < 1$

$$\Longrightarrow (f*g)(x) = \begin{cases} x > 1, & e^{-x} \int_{-1}^{1} e^{y}\, dy \\ -1 < x < 1, & e^{-x} \int_{-1}^{x} e^{y}\, dy \\ x < 1, & 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x > 1, & e^{-x}(e - e^{-1}) \\ -1 < x < 1, & e^{-x}(e^{x} - e^{-1}) \\ x < 1, & 0 \end{cases}$$



- Dimostrare che la norma L^p con $p \in (0,1)$ non è una norma valida

Tesi: la norma $L^{p<1}$ non soddisfa la disug. triang.

Dovrebbe essere:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p\right)^{1/p}$$

Se pongo $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ e $g(x) = \chi_{(1,2)}(x)$ diventa:

$$\left(\int_0^2 1^p\,dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 1^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_1^2 1^p\,dx\right)^{p}$$

$$2^{1/p} \leq 1^{1/p} + 1^{1/p} = 2 \quad \text{ma} \quad 2^{1/p} > 2 \text{ per } p<1$$

quindi la norma $L^{p<1}$ non soddisfa la disug. triang.

<u>Approfondimento</u> sugli spazi L^p

Sappiamo che tra spazi L^p in $\mathbb{R}$ non valgono inclusioni banali:

$$p_1 > p_2 \quad \begin{array}{l} \not\Longrightarrow \; L^{p_1}(\mathbb{R}) \supseteq L^{p_2}(\mathbb{R}) \\ \not\Longleftarrow \; L^{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq L^{p_2}(\mathbb{R}) \end{array}$$

però se lo spazio ambiente ha misura finita $(\mu(\Omega) < +\infty)$ allora è vero che

$$p_1 < p_2 \implies L^{p_1}(\Omega) \supseteq L^{p_2}(\Omega)$$

Chiamiamo $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid f \text{ è misurab. e } \forall\, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ limitato è } f \in L^p(\Omega)\}$

<u>Es</u>: per $n=1$, $L^p_{loc}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid f \text{ è misurabile e } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty \text{ per } -\infty < a < b < +\infty \}$

$L^p_{loc}(\mathbb{R})$ è uno sp. vett. (<u>non</u> normato).

Se $p_1 < p_2 \implies L^{p_2}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p_1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \supseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \supseteq L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

ad es: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ é integrab vicino a 0 e in qualsiasi intervallo (a,b) ma non all'infinito.

$f \notin L^p(\mathbb{R})$ ma $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ se $\frac{1}{x^{p/3}}$ integrab. in 0

$\Longrightarrow 1 < p < 3$

<u>Approfondimento</u> sulla convoluzione

$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \exists\, f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\| f*g \|_1 \leq \| f \|_1 \cdot \| g \|_1$

<u>Teorema</u> (disuguaglianza di Young)

Sia $p \in [1, +\infty]$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora $\exists\, f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e vale:

$$\| f*g \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^1} \cdot \| g \|_{L^p}$$

Operatori Lineari Continui

Operatore lineare: se V e W sono 2 sp. vett. diciamo che

$T: V \to W$ é un op. lin. se

$\forall v_1, v_2 \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2).$$

(Se T é un op. lin. di solito si scrive Tv)

V_n, V_m sp. vett di dim. finita n e m, $T: V_n \to V_m$ é un op. lin.
Fissata una base in V_n e una in V_m l'operatore si rappresenta come moltiplicazione di una matrice $n \times m$ per i vettori!

$\vec{v} \in V_n \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \qquad T\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i T\vec{e}_i$

$T\vec{e}_i \in V_m \qquad T\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \vec{w}_j$ $\qquad$ $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ base di V_m; $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ base di V_n

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \longleftrightarrow T$

Consideriamo l'eq. lin. diff. del 2° ordine:

$$\underbrace{\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y}_{Ly} = f(x)$$

$$L: \mathcal{C}^2[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}^0[a,b] \quad \text{se } \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}^0[a,b]$$
$$y \longmapsto \alpha y'' + \beta y' + \gamma y$$

L é un op. lin. tra 2 sp. vett. (di dimensione infinita)

Sia T un op. lin. tra 2 sp. vett. normati X e Y

$T: X \longrightarrow Y$ lineare

Cosa vuol dire che T é continuo nel punto $\bar{x} \in X$?

Se $x_n \to \bar{x}$ allora $Tx_n \to T\bar{x}$ ossia:

$$\|x_n - \bar{x}\|_X \longrightarrow 0 \implies \|Tx_n - T\bar{x}\|_Y \longrightarrow 0$$

Teorema Siano X e Y sp. vett normati e sia $T: X \to Y$ un op. lin. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

1) T é cont. in 0 (cioé $\|x_n\|_X \to 0 \implies \|Tx_n\|_Y \to 0$)

2) T é cont. in ogni $\bar{x}$ di X (cioé $\forall \bar{x} \in X$ $\|x_n - \bar{x}\|_X \to 0 \implies \|Tx_n - T\bar{x}\|_Y \to 0$)

3) $\exists K > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X \quad \forall x \in X$
ossia $\sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$

Def Siano X e Y sp. vett. normati e $T: X \to Y$ un operatore. Si dice che T é continuo (o limitato) se vale una delle tre condizioni equivalenti del teorema precedente

In tal caso il numero $\sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ si dice norma dell'operatore T e si indica con $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ é lin. continuo}\}$
$=$ spazio di tutti gli op. lin. continui tra X e Y

Esempi: $\longrightarrow$ caso finito dimensionale

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$T : \vec{x} \to A\vec{x} \qquad A: \text{ matrice } \underset{\text{righe}}{m} \times \underset{\text{colonne}}{n}$$

$$(T\vec{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{con } i = 1, \dots, m$$

$$|(T\vec{x})_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \qquad |a_{ij}| \leq K \quad \forall i,j$$
$$\leq K \sum_{j=1}^{n} |x_j| = K \|\vec{x}\|$$

$c \leq K$

$\|T\vec{x}\| \leq c\|x\| \implies$ se X, Y hanno dimensione finita ogni operatore $T: X \to Y$ é continuo

$\longrightarrow$ caso infinito dimensionale

$\to$ Operatori differenziali

$$L : \underset{\|\dots\|_{C^2}}{C^2[a,b]} \longrightarrow \underset{\|\dots\|_{C^0}}{C^0[a,b]}$$
$$L : y \longmapsto \alpha y'' + \beta y' + \gamma y \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in C^0[a,b]$$

L é lineare, mostriamo che é continuo:

$$\|Ty\|_{C^0[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\alpha(x) y''(x) + \beta(x) y'(x) + \gamma(x) y(x)|$$
$$= \|\alpha y'' + \beta y' + \gamma y\|_{C^0[a,b]} \leq \|\alpha y''\|_{C^0} + \|\beta y'\|_{C^0} + \|\gamma y\|_{C^0}$$
$$\leq \|\alpha\|_{C^0} \|y''\|_{C^0} + \|\beta\|_{C^0} \|y'\|_{C^0} + \|\gamma\|_{C^0} \|y\|_{C^0}$$
$$\leq \|y\|_{C^2[a,b]} \underbrace{(\|\alpha\|_{C^0} + \|\beta\|_{C^0} + \|\gamma\|_{C^0})}_{K > 0} \implies L \text{ é continua}$$

$\to$ Operatori integrali

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Fissiamo una $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo l'operatore

$T: f \longmapsto f * g \qquad T: L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n) \qquad T$ é lineare per le proprietà dell'integrale

$$\|Tf\|_1 = \|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \overbrace{\|g\|_1}^{K>0} \implies T \text{ é continuo}$$

(vale anche per $f \in L^p$ con $p \in [1,+\infty]$ per il teo. di Young)

→ Operatore di moltiplicazione

Fissiamo $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$T: f \longmapsto f \cdot g$$
$$T: L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \qquad 1 \leq p \leq +\infty$$

$$\|Tf\|_p = \|f \cdot g\|_p = \left(\int |f \cdot g|^p\right)^{1/p} \leq \underbrace{\|g\|_\infty}_{K>0} \|f\|_p \implies T \text{ é continuo}$$

<u>NB</u>: $\|T\| := \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{K > 0 \mid \text{condizione } 3)\} < +\infty$

operativamente, se trovo $K > 0$ per cui vale la condizione 3), posso dire che $\|T\| < K$

<u>Es</u> (op. lin. <u>non</u> continuo): $T: C_0^0(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R})$ supporto compatto

ad es $T: f(x) \longrightarrow x f(x)$

T é lineare, ma <u>non continuo</u>, cioé $\nexists K > 0$ t.c. $\forall f \in C_0^0(\mathbb{R})$ sia $\|Tf\|_0 \leq K\|f\|_0$ ovvero $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x f(x)| \leq K \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

Costruiamo una successione di funzioni per cui

$$\sup_x |f_n(x)| = 1 \qquad \sup_x |x f_n(x)| \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_n(x) = f(x-n) \implies \sup_x |x f_n(x)| = n$$

dovremmo avere che $n \leq K \cdot 1$ per $n \to +\infty \implies$ <u>assurdo</u>

Consideriamo lo spazio $\mathcal{L}(X,Y)$ di tutti gli op. lineari continui tra 2 sp. vett. normati X e Y fissati.

$\mathcal{L}(X,Y)$ é uno sp. vettoriale.

Anzi $\mathcal{L}(X,Y)$ é uno sp. vett. normato (con la norma di operatori).
(Si dimostra che se Y é di Banach, anche $\mathcal{L}(X,Y)$ lo é)

Funzionali lineari continui

Def Sia X uno sp. vett normato su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$).
Si dice funzionale lineare continuo su X un operatore lineare continuo $T: X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

Esplicitamente: $T: X \to \mathbb{R}$
$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T f_1 + \lambda_2 T f_2$
$\sup_{x \in X \setminus 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_X} < +\infty$ o anche $\exists K > 0$ t.c. $\forall x \in X$ $|Tx| \leq K |x|_X$

Es: $X = C^1[-1,1]$ con norma C^1

$T: f \to f'(0)$ T é lineare

$|Tf| = |f'(0)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |f'(x)| \leq \|f\|_{C^1[a,b]}$ T é continua

Es: funzionale "integrale definito"

$X \in C^0[a,b]$ con norma C^0

$Tf = \int_a^b f(x)\,dx$ T é lineare

$|Tf| = |\int_a^b f(x)\,dx| \leq \|f\|_{C^0[a,b]} \cdot |b-a|$ T é continua

Es (funzionale lineare <u>non</u> continuo):

$T: C^0_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con norma L^1

$T: f \longmapsto f(0)$ T é detto "funzionale di valutazione"

T é lineare e ben definito.

$\exists K > 0$ t.c. $|f(0)| \leq K \|f\|_{L^1} = K \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ $\forall f \in C^0_0(\mathbb{R})$?

NO. Per mostrarlo costruiamo una successione $f_n \in C^0_0(\mathbb{R})$ t.c. $f_n(0) \to +\infty$ per $n \to +\infty$ ma $\int_{\mathbb{R}} |f_n| = 1$ $\forall n$.

$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_n(x) = n f(nx) \implies \begin{array}{l} f_n(0) = n \\ \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = 1 \\ n \leq K \cdot 1 \\ \Downarrow \\ \underline{\text{assurdo}} \end{array}$

$\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ = sp. vett normato di tutti i funzionali lineari continui su X

É uno sp. vett. normato e completo

$\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X'$ o X^* "spazio duale" di X

Il duale di uno sp. vett. normato é lo spazio di tutti i funzionali lineari continui su X

Chi é il duale di $L^p(\Omega)$?

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura

Se q é esp. coniugato di p, e fisso $g \in L^q$, allora:

$T : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$T : f \longmapsto \int_\Omega f \cdot g$ é un funz. lin. cont. su L^p.

Ogni funzione $g \in L^q$ definisce un funzionale lineare continuo (g é come un parametro)

$T_g : f \longmapsto \int_\Omega f \cdot g \qquad |Tf| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

(si puó dimostrare che $\|T_g\| = \|g\|_{L^q}$)

Si puó dimostrare che vale anche il viceversa:

sia $T \in (L^p)'$ (cioé T funzionale lin. cont. su L^p)

allora $\exists g \in L^q$ t. c. $\forall f \in L^p$ é $Tf = \int_\Omega f g$ e $\|g\|_{L^q} = \|T\|$

(si dice che g rappresenta T).

Teorema (di rappresentazione di Riesz)

Se p, q sono esponenti coniugati e $p \in [1, +\infty)$ allora lo spazio duale di $L^p(\Omega)$ si identifica con $L^q(\Omega)$

$$(L^p(\Omega))' \ni T \iff \exists g \in L^q \text{ t.c. } Tf = \int_\Omega fg$$

$$\|T\| = \|g\|_{L^q}$$

$$\mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathbb{R}) \simeq L^q(\Omega)$$

Indicando q con p' si ottiene la scrittura $(L^p(\Omega))' \simeq L^{p'}(\Omega)$

Spazi di Hilbert (Von Neumann ~ 1930)

→ fondamento matematico della meccanica quantistica

ortogonalità (in spazi di dimensione infinita)

spazio vettoriale normato completo (di Banach)

Def Sia V uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).
Diciamo che V è uno sp. vett. con prodotto scalare se, oltre alle 2 operazioni di sp. vett., è def una terza operazione "prodotto scalare":

$$(\vec{u}, \vec{v}) : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$$

e soddisfa queste proprietà:

1) $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 (\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \lambda_2 (\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ (linearità sulla prima componente)
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad u_1, u_2, v \in V$

2) a. se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ (proprietà commutativa)

b. se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad (\vec{u}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{u})}$ complesso coniugato

conseguenza di 2b] $(\vec{u}, \vec{u}) = \overline{(\vec{u}, \vec{u})}$ cioè $(\vec{u}, \vec{u}) \in \mathbb{R}$

conseguenza di 1 e 2a] Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il prod. scalare è lineare anche rispetto alla seconda componente:

$$(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 (\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \lambda_2 (\vec{u}_1, \vec{v}_2)$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}, \vec{v}_1) + (\vec{u}, \vec{v}_2)$$
$$(u, \lambda v) = \bar{\lambda} (\vec{u}, \vec{v})$$

Nel caso reale si dice che il prod. scalare è bilineare
Nel caso complesso si dice che il prod. scalare è sesquilineare

3) $(\vec{u},\vec{u}) \geq 0 \quad \forall \vec{u} \in V \quad \left(e \ (\vec{u},\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = 0 \right)$

<u>Teorema</u> Sia V uno sp. vett. con prodotto scalare. Allora:

1) Vale la "disuguaglianza di Cauchy-Schwartz":
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad |(\vec{u},\vec{v})| \leq \sqrt{(\vec{u},\vec{u})}\sqrt{(\vec{v},\vec{v})}$

2) Se si definisce $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u},\vec{u})}$, allora $\|\dots\|$ soddisfa le proprietà della norma

3) La norma definita qui sopra soddisfa l'"uguaglianza del parallelogramma":
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

Se V è uno sp. vett. con prodotto scalare metteremo in V la "norma del prodotto scalare"

V con questa struttura di sp. vett. normato in cui la norma proviene da un prodotto scalare si dice <u>spazio pre-hilbertiano</u>

<u>Def</u>: Si dice **spazio di Hilbert** uno sp. pre-hilbertiano completo. Ossia: uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare

<u>Esempi</u>: $\longrightarrow$ caso finito dimensionale

$V = \mathbb{R}^n \qquad (\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ è un prod. scalare

$\|u\| = \sqrt{\sum u_i u_i} = \sqrt{\sum u_i^2}$ (norma euclidea)

In $\mathbb{R}^n$ posso anche mettere un altro prod. scalare

$(\vec{u},\vec{v})_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$

$\|u\|_A = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j} \qquad A$ simmetrica e def. pos.

$V = \mathbb{C}^n \quad (\vec{u},\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \quad$ ma $\quad (\vec{u},\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \in \mathbb{C}$

$(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j$ allora sì che $(\vec{u},\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ è un prod. scalare, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum |u_j|^2}$

$\longrightarrow$ caso infinito dimensionale

$V = \mathcal{C}^0[a,b]$ $\quad (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} = \|f\|_{L^2(a,b)}$!!

$\rightarrow$ La norma indotta da questo prodotto scalare è la norma L^2

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$\mathcal{C}^0[a,b]$ con la norma L^2 NON è completo

Questo è un esempio di sp. pre-hilbertiano che non è di Hilbert

Es: $V = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $\quad (f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x)$ se $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$

(se $f,g : \Omega \to \mathbb{C}$ allora $(f,g) = \int_\Omega f(x)\,\overline{g(x)}\,d\mu(x)$)

Questo è un prod. scalare che induce la norma $L^2(\Omega)$.

Quindi $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno sp. di Hilbert

Per avere esempi significativi di sp. di funzioni che siano sp. di Hilbert occorre la teoria della misura e integrazione di Lebesgue

Es (sp. di Hilbert di dim. infinita che non è uno sp. di funzioni):

$V = L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e come spazio di misura scegliamo

$\Omega = \mathbb{N} \quad \mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \mu =$ misura del conteggio

$f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}} |f(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} |f(x)|\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \underbrace{\mu\{n\}}_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = \boxed{\ell^2 = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \right\}}$$

$$(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

{ V spazio pre-hilbertiano, H spazio di Hilbert }

Teorema Se V è uno sp. pre-hilbertiano, la norma e il prod. scalare sono continui, cioè:

1) $\{x_n\} \subseteq V$ t.c. $x_n \to x$ (cioè: $\|x_n - x\| \to 0$) allora $\|x_n\| \to \|x\|$ per $n \to +\infty$.
"la convergenza in norma implica la convergenza delle norme"

2) $\{y_n\} \subseteq V$ t.c. $y_n \to y$ allora $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ per $n \to +\infty$.

Dim: 1) Per la disug. triang.

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{cioè} \quad \|x_n\| \to \|x\|$$

2) Hp: $x_n \to x \qquad y_n \to y$
Ts: $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)|$$

$$= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)|$$

$$\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)|$$

disug. di Cauchy-Schwidt

$$\leq \underset{\substack{\downarrow \\ \|x\|}}{\|x_n\|}\, \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|y_n - y\|} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|x_n - x\|}\, \|y\| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Ortogonalità: Sia V uno sp. pre-hilbertiano. $\vec{u}, \vec{v} \in V$
Allora diciamo che $\vec{u} \perp \vec{v}$ se $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Teorema (di Pitagora - 1)

Sia V uno sp. pre-hilbertiano e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vettori a 2 a 2 ortogonali cioè: $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Allora: $\|\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{v}_i\|^2$

bilinearità

Dim: $\|\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \vec{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\vec{v}_i, \vec{v}_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{v}_i\|^2$$

Teorema (di Pitagora - 2)

Sia H uno sp. di Hilbert, sia $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ e supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \|\vec{x}_n\|^2 < +\infty$ dove gli $\vec{x}_n$ sono ortog. a 2 a 2.

Allora $\exists\ \vec{x} \in H$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ in H

Inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} \|\vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n\|^2$.

vuol dire che:

$$\vec{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k, \quad \|\vec{s}_n - \vec{x}\| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Dim: devo dimostrare che $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $s_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k$ è converg. in H (a un certo $\vec{x}$).

Poiché H è completo, è sufficiente dimostrare che $\{s_n\}$ è di Cauchy cioè:

$\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| \longrightarrow 0 \quad$ per $n, m \to +\infty$

somma di un n° finito di vettori a 2 a 2 ortogonali

$n > m$

$$\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k - \sum_{k=1}^{m} \vec{x}_k\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} \vec{x}_k\|^2 =$$

applico il teo. di Pitagora - 1

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \|\vec{x}_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}_k\|^2 = \sigma_n - \sigma_m \longrightarrow 0$$

cioè σ_n è la successione delle somme parziali della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ che per ipotesi converge.

$\{\sigma_n\}$ è convergente, quindi è di Cauchy, quindi $\sigma_n - \sigma_m \to 0$.

Quindi anche $\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| \to 0$, cioè $\{\vec{s}_n\}$ è di Cauchy in H.

Sistemi ortonormali

Sia V uno spazio pre-hilbertiano, dico che $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sono un sistema ortonormale (finito) se sono a 2 a 2 ortogonali e ciascuno ha norma 1

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

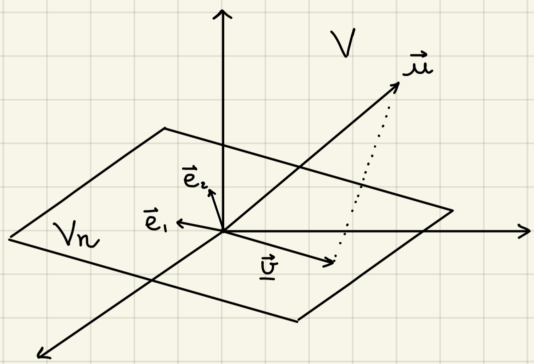
Sia $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\|v_i \vec{e}_i\|^2}_{(|v_i|\|\vec{e}_i\|)^2 = (|v_i| \cdot 1)^2} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

Pitagora - 1

Problema di approssimazione

Sia V uno sp. pre-hilbertiano. Sia V_n un sottospazio vettoriale di V, avente dimensione finita, e supponiamo che $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sia una base ortonormale di V_n.



Mi pongo questo problema: dato un elemento $\vec{u} \in V$, qual è l'elemento di V_n che approssimi $\vec{u}$ il meglio possibile?

L'elemento $\underline{\vec{v}} \in V_n$ che renda minima la distanza da da $\vec{u}$ sarà la proiezione ortogonale di $\vec{u}$ su V_n cioè sarà

$$\underline{\vec{v}} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$$

Teorema (delle proiezioni)

Se V, V_n ed $e_1, \dots, e_n$ sono come sopra
$\forall \vec{u} \in V \quad \exists! \, \underline{\vec{v}} \in V$ tale che:

1) $\|\underline{\vec{v}} - \vec{u}\| = \min\{\|\vec{v} - \vec{u}\| \mid \vec{v} \in V_n\}$

2) $\underline{\vec{v}} - \vec{u} \perp V_n$ (cioè $(\underline{\vec{v}} - \vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_n$)

3) $\underline{\vec{v}} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$

4) $\|\underline{\vec{v}}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$

Consideriamo uno sp. di Hilbert H e supponiamo di conoscere un sistema ortonormale $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (numerabile)

$$(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Per ogni n fissato, sia V_n il sottospazio di H, n-dimensionale, che ha per base ortonormale $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \dots \subset H$$

Applico il teo. delle proiezioni a H per ciascun V_n: considero $\vec{u} \in H$ e lo proietto su V_n

$$P_{V_n}\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$$

$$\vec{u} - \underbrace{P_{V_n}\vec{u}}_{\text{proiezione di } \vec{u} \text{ su } V_n} \perp V_n \qquad \| P_{V_n}\vec{u} \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \quad \forall n$$

Per $n \to +\infty$ scopro che la serie numerica converge.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \quad \text{disuguaglianza di Bessel}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j \|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

Teo di Pitagora - 2: succ. di vettori a 2 a 2 ortog.

$$(\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \| (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j \|^2 < +\infty$$

allora $\exists\, \underline{\vec{u}} \in H$ t.c. $\sum_{j=1}^{\infty} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j = \underline{\vec{u}}$

cioè $\| \sum_{j=1}^{n} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j - \underline{\vec{u}} \| \longrightarrow 0$ per $n \longrightarrow +\infty$

inoltre $\| \underline{\vec{u}} \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$

Sarebbe bello sapere che $\underline{\vec{u}} = \vec{u}$ cioè sapere che $\vec{u}$ si può "sviluppare in serie di Fourier" rispetto al sist. o.n. $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ scrivendo $\vec{u} = \sum_{j=1}^{\infty} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$.

Perché questo sia vero non è sufficiente che gli $\{\vec{e}_n\}$ siano un sist. o.n.. Dovranno anche essere un sistema "completo" in qualche senso, cioè che contiene tutte le possibili direzioni linearmente indipendenti dello spazio.

Def: Sia H uno sp. di Hilbert. Si dice che $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é un sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) se

1) $(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$ (s.o.n)

2) $\forall \vec{u} \in H$ se $(\vec{u}, \vec{e}_n) = 0$ $\forall n$ allora $\vec{u} = \vec{0}$

Teorema (trasformata e serie di Fourier in sp. di Hilbert)

Sia H uno sp. di Hilbert e $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un s.o.n.c. in H.

$\forall \vec{x} \in H$ definiamo $\hat{\vec{x}} = \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n)$.

Allora $\hat{\vec{x}} \in \ell^2$ ossia $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 < +\infty$.

L'operatore $\mathcal{F}: H \longrightarrow \ell^2$, $\mathcal{F}: \vec{x} \longmapsto \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é lineare, iniettivo, suriettivo, conserva il prod. scalare e la norma

complesso coniug.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in H \quad (\vec{x}, \vec{y})_H = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \overline{\hat{y}_n} = (\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}})_{\ell^2}$$

$$\forall \vec{x} \in H \quad \|\vec{x}\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 = \|\hat{\vec{x}}\|_{\ell^2}$$

In sintesi, l'operatore $\mathcal{F}$ é una isometria di sp. di Hilbert.

($\mathcal{F}$ si dice trasformata di Fourier sullo sp. di Hilbert)

Inoltre, $\forall \vec{x}$ si ha $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$ cioé: la serie di Fourier di $\vec{x}$ converge a $\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in H$

$$\lim_{n \to +\infty} \| \vec{x} - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \vec{e}_j \|_H = 0$$

Dim: sappiamo giá che $\forall \vec{x} \in H$

$\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 < +\infty$ e $\exists \underline{\vec{x}} \in H$ t.c.

$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n = \underline{\vec{x}}$ (la serie di Fourier di $\vec{x}$ converge a un certo $\underline{\vec{x}}$)

$\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n)$

Mostriamo ora che se il s.o.n. é completo allora $\underline{\vec{x}} = \vec{x}$

Per def. di s.o.n.c. se dimostriamo che

$(\vec{x} - \underline{\vec{x}}, \vec{e}_n) = 0$ $\forall n$ allora $\vec{x} - \underline{\vec{x}} = 0$ cioé $\vec{x} = \underline{\vec{x}}$

$$(\vec{x}-\vec{\underline{x}}, \vec{e}_n) = (\vec{x}, \vec{e}_n) - (\vec{\underline{x}}, \vec{e}_n) = \hat{x}_n - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j \vec{e}_j, \vec{e}_n\right)}$$

$$\hat{x}_n = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j \underbrace{(\vec{e}_j, \vec{e}_n)}_{\delta_{j,n}}$$

$$= \hat{x}_n - \hat{x}_n = 0 \checkmark$$

(perché il prod. scalare è bilineare e continuo in H)

Perciò $\forall \vec{x} \in H$ abbiamo $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$
e per l'ortogonalità $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2$

$\|\mathcal{F}(\vec{x})\|_{\ell^2}^2 = \|\vec{x}\|_H^2$ perciò $\mathcal{F}$ è iniettivo
$(\mathcal{F}(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0)$

Sia $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ cioè $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n \vec{e}_n\|^2 < +\infty$ quindi per Pitagora-2:

$\exists \vec{x} \in H$ t.c. $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vec{e}_n$

Mostriamo che $\hat{x}_n = \lambda_n$ perciò $\mathcal{F}(\vec{x}) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \vec{e}_j, \vec{e}_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\vec{e}_j, \vec{e}_n) = \lambda_n$$

lin. e cont. del prod. scalare $\Longrightarrow \mathcal{F}$ è suriettiva

Mostriamo che $\mathcal{F}$ conserva il prod. scalare.

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Ts: $(\vec{x}, \vec{y})_H = (\mathcal{F}(\vec{x}), \mathcal{F}(\vec{y}))_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \bar{\hat{y}}_n$

So già che $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono somma delle loro serie di Fourier:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n, \sum_{m=1}^{\infty} \hat{y}_m \vec{e}_m\right) =$$

bilin. e cont. del prod. scalare

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{x}_n \vec{e}_n, \hat{y}_m \vec{e}_m)}_{\hat{x}_n \cdot \bar{\hat{y}}_n \cdot \delta_{n,m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \bar{\hat{y}}_n$$

Applicazione – Serie di Fourier

$H = L^2(0,T)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(n\omega x)/\sqrt{\frac{T}{2}} \\ \operatorname{sen}(n\omega x)/\sqrt{\frac{T}{2}} \\ 1/\sqrt{T} \end{array}}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$n = 1, 2, 3 \dots$

$\int_0^T \cos^2(n\omega x)\,dx = \frac{T}{2}$

$\rightarrow$ s.o.n. e anche completo

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(y)\cos(n\omega y)\,dy} \qquad \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(y)\,\mathrm{sen}(n\omega y)\,dy}$$

La serie di Fourier di $f(x)$ é:

$$\boxed{\mathcal{F}(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega x) + b_n\,\mathrm{sen}(n\omega x)\}}$$

$\forall f \in L^2(0,T)$ la serie di Fourier di f converge a f (in L^2)

$$\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n}\{a_j\cos(j\omega x) + b_j\,\mathrm{sen}(j\omega x)\}\right)\right\|_{L^2(0,T)} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty$$

("conv. in norma quadratica")

Serie di Fourier in forma complessa

$L^2(0,T) \qquad e^{in\omega x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad n \in \mathbb{Z}$

$(f, g) = \int_0^T f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ --> coniugato

$$(e^{in\omega x}, e^{im\omega x}) = \int_0^T e^{in\omega x} e^{-in\omega x}\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T & n = m \end{cases}$$

$\left\{\frac{e^{in\omega x}}{\sqrt{T}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é un s.o.n.c. in $L^2(0,T)$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(y)\,e^{-in\omega y}\,dy = \left(f, \frac{e^{in\omega x}}{T}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{in\omega x} = f(x)$$ ↳ converge in $L^2(0,T)$

Trasformata di Fourier

Se ho un segnale $f(t)$ <u>non periodico</u>, posso ancora pensare di vederlo come sovrapposizione di infiniti segnali periodici?

$\Longrightarrow$ Pensiamo a un segnale non periodico che ha "periodo $T \longrightarrow +\infty$"

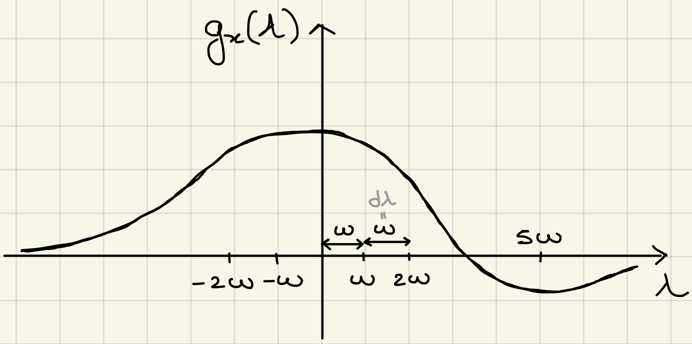
Sia $f(x)$ una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica (dove T è "grande")

Posso sviluppare f in serie di Fourier complessa e scrivere:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega x} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-in\omega y} dy$$

Definiamo le funzione $g_x(\lambda) = e^{i\lambda x}\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-i\lambda y} dy$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{2\pi} g_x(n\omega) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega \, g_x(n\omega)}_{} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$



è una specie di somma di Riemann dell' integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_x(\lambda)\, d\lambda$$

per $T \to +\infty$ quindi $\omega \to 0$

$$f(x) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_x(\lambda) d\lambda$$

$T \to +\infty$ e $\omega \to 0$

$$\simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda y} dy\right) d\lambda$$

$\lambda = 2\pi\xi$, $d\lambda = 2\pi d\xi$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\xi x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i2\pi\xi y} dy\right) \cancel{2\pi} d\xi$$

Quindi se definiamo $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i2\pi\xi y} dy$ si dovrebbe poter dimostrare che $\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi}$

Notiamo che $\forall \xi$ la funzione (di x)

$$x \longmapsto \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$$

è periodica di periodo $\frac{1}{\xi}$ cioè frequenza ξ.

Il segnale non periodico $f(x)$ è stato scritto come "somma integrale" di infiniti segnali periodici corrispondenti a tutte le possibili frequenze $\xi \in \mathbb{R}$

Def: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}^n \quad \left(\xi \cdot y = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j\right)$$

$$|f(y) e^{-2\pi i \xi y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$\hat{f}$ si dice trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to \hat{f} \text{ é limitata.}$$

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la funzione $\hat{f}$ é continua.

Per applicare il teo. sulla continuitá degli integrali definiti da un parametro devo verificare che:

1) Per q.o. y fissata, la funzione $\xi \mapsto f(y) e^{-2\pi i \xi y}$ é continua.

2) $|f(y) e^{-2\pi i \xi y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
indip. da ξ

Sappiamo anche che $\hat{f}$ é limitata cioé $\hat{f} \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^n)$ e $\|\hat{f}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|f\|_{L^1}$

L'operatore trasformata di Fourier

$\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^n)$ lineare e continuo, con norma ≤ 1

$$\frac{\|\mathcal{F} f\|_{\mathcal{C}^0}}{\|f\|_{L^1}} \leq 1$$

Si puó dimostrare anche che:

Teorema $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\hat{f}(\xi) \longrightarrow 0$ per $|\xi| \longrightarrow +\infty$

Quindi in realtá $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}^n)$ ("trasf. di Fourier sulla retta")

Negli sp. di Hilbert. $\mathcal{F}: H \longrightarrow \ell^2$ ("trasf. di Fourier sulla circonferenza")
$\mathcal{F}: f \longmapsto \{\hat{f}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Trasf. di Fourier di f. simmetriche

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f è:

- pari ($f(-x) = f(x)$) allora $\hat{f}$ è pari
- dispari ($f(-x) = -f(x)$) allora $\hat{f}$ è dispari

Se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a valori reali

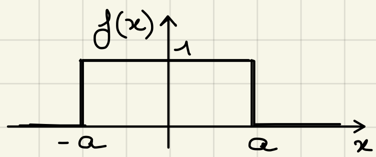
$$\hat{f}(\xi) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy}_{Re[\hat{f}]} - i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) \operatorname{sen}(2\pi \xi y)\, dy}_{Im[\hat{f}]}$$

Se f è anche pari: $Im[\hat{f}] = 0 \Rightarrow \hat{f}$ è reale e pari

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy = 2\int_0^{+\infty} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy$$

Se f invece è dispari: $Re[\hat{f}] = 0 \Rightarrow \hat{f}$ è immaginaria

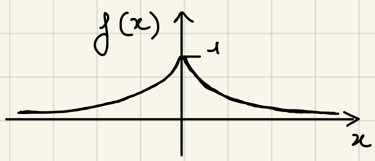
$$\hat{f}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} f(y) \operatorname{sen}(2\pi \xi y)\, dy = -2i \int_0^{+\infty} f(y) \operatorname{sen}(2\pi \xi y)\, dy$$



Es. $f(x) = \chi_{(-a,a)}(x)$ reale, pari.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x \xi}\, dx = 2\int_0^a \cos(2\pi \xi x)\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2\pi a \xi)}{\pi \xi} \longrightarrow \text{reale, pari, } C^0_*(\mathbb{R})$$

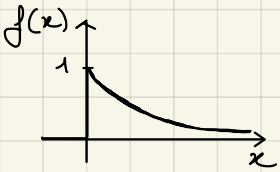


Es: $f(x) = e^{-|x|}$ reale, pari

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-2\pi i \xi)}\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+2\pi i \xi)}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{x(1-2\pi i \xi)}}{1-2\pi i \xi}\right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{e^{-x(1+2\pi \xi i)}}{1+2\pi i \xi}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{1+4\pi^2 \xi^2} \in C^0_*(\mathbb{R}) \text{ reale}$$

Oss: $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, dy$ il valore della trasformata nell'origine è pari all'integrale della funzione da $-\infty$ a $+\infty$



Es: $\mathcal{F}\left(e^{-x}\chi_{(0,+\infty)}\right)(\xi) = ?$

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-y} e^{-2\pi i \xi y}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+2\pi i \xi)}\,dy =$$

$$= \left[\frac{e^{-y(1+2\pi i \xi)}}{-(1+2\pi i \xi)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i \xi} =$$

$$= \overset{\text{Re}}{\frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}} - \overset{\text{Im}}{\frac{2\pi i \xi}{1+4\pi^2\xi^2}} = \hat{f}(\xi)$$

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\frac{1}{1+2\pi i \xi}\right| = \frac{1}{|1+2\pi i \xi|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\xi^2}}$$

Proprietà della trasf. di Fourier

→ Teorema (trasformata di Fourier e convoluzione)

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\left[\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\cdot\hat{g}\right]$

Dim: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quindi $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\exists\, \mathcal{F}(f*g)$

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-2\pi i \xi x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy\right)dx$$

è un integrale iterato

scambio l'ordine di integrazione

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i \xi x}\,dx\right)dy = \qquad x-y=z \quad x = y+z, \; dx = dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi (y+z)}\,dz\right)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \xi y}\,dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi z}\,dz = \hat{g}(\xi)\cdot\hat{f}(\xi)$$

Per poter scambiare l'ordine di integrazione devo verificare che l'integrale del modulo converge (teo. di Fubini-Tonelli):

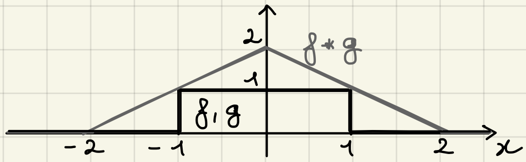
$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \xi x}|\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)dx =$$

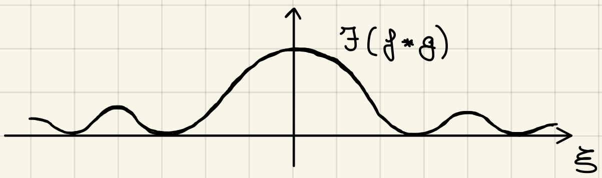
$$= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx\right)dy = \qquad x-y=z$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|\,dz = \|g\|_{L^1}\cdot\|f\|_{L^1} < +\infty \quad ✓$$

Es: $f(x) = g(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2$$





→ <u>Teorema</u> $\forall f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha $\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{\hat{f}\,g}^{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\hat{g}}$.

$\hat{f} \in \mathcal{C}^0_*$, $g \in L^1$

Dim: $$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,e^{-2\pi i xy}\,dy\right)dx =$$

scambio l'ordine di integrazione

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,e^{-2\pi i xy}\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\hat{g}(y)\,dy$$

Per giustificare lo scambio:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|e^{-2\pi i xy}|\,dy\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}\;\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}$$

⟶ l'integrale del modulo è finito ✓

→ <u>Trasformata di Fourier e derivata</u>

$\mathcal{F}(f') = ?$ $\qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(y)\,e^{-2\pi i \xi y}\,dy =$$

$$= \left[\cancel{f(y)\,e^{-2\pi i \xi y}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,2\pi i \xi\,e^{-2\pi i \xi y}\,dy$$

$$= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,e^{-2\pi i \xi y}\,dy$$

Se $f \in L^1$, $f' \in L^1$, $f \to 0$ per $y \to \pm\infty$ allora

$$\mathcal{F}(f'(y))(\xi) = 2\pi i \xi\,\hat{f}(\xi)$$

Riesco ad arrivare alla stessa conclusione con meno condizioni?

$\int_a^b f'\cdot g = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f\cdot g'$ vale per $g \in \mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}^0$ derivabile a tratti

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0_*(\mathbb{R})$, f derivabile a tratti, $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$

Iterando: $\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) =_? (2\pi i \xi)^{(k)} \hat{f}(\xi)$
ma con che condizioni?

Teorema (trasf. della derivata - caso unidimensionale)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Supponiamo che, per un certo intero $k = 1, 2, 3 \ldots$ sia:

$$f \in C^{k-1}(\mathbb{R}) \qquad f, f', f'', \ldots, f^{(k-1)} \longrightarrow 0 \text{ per } y \to \pm\infty$$

$f^{(k-1)}$ è derivabile a tratti e $f, f', f'', \ldots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$

Allora $\left[\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (2\pi i \xi)^{(k)} \hat{f}(\xi)\right]$ (1)

In n variabili: $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ "multi indice"
$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

$$(2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} (2\pi i \xi_2)^{\alpha_2} \cdots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_n} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

Es: trasf. di Fourier del laplaciano

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \qquad \mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)(\xi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (2\pi i \xi)^2 \hat{f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$$

$$\left[\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi)\right]$$

Derivata della trasformata

$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = ?$ (caso unidimensionale)

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}\left(f(y) e^{-2\pi i \xi y}\right) dy =$$

si può fare?

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)(-2\pi i y) e^{-2\pi i \xi y} dy =$$

$$= \mathcal{F}(-2\pi i y f(y))(\xi)$$

deve essere così

$$|f(y)(-2\pi i y)\, e^{-2\pi i \xi y}| = |f(y)|\, 2\pi |y| \in L^1(\mathbb{R})$$

Teorema Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \quad e \quad \hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$$

Iterando: $\hat{f}''(\xi) = (\hat{f}'(\xi))' = \dfrac{d}{d\xi}\mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi) =$

$= \mathcal{F}((-2\pi i x)^2 f(x))(\xi)$ purché $f(x), x f(x), x^2 f(x) \in L^1$

Teorema Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e, per un certo intero $k = 1,2,3\ldots$ anche $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \quad e \quad \left[\frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^k f(x))(\xi)\right] \quad (2)$$

(In n variabili vale la formula analoga

$$\frac{\partial^\alpha \hat{f}}{\partial \xi^\alpha} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$$ con α multi indice)

(1) $\mathcal{F}(f^{(k)}(x))(\xi) = \overbrace{(2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi)}^{\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R})}$ ($f^{(k-1)}$ derivabile a tratti)

$\longrightarrow (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi) \longrightarrow 0$ per $\xi \to \pm\infty$

cioè

$$\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^k}\right) \text{ per } \xi \to \pm\infty$$

Più regolare è f, più velocemente $\hat{f}$ tende a 0 per ξ che tende all'infinito

Se f è un segnale molto regolare, sarà povero di frequenze elevate

(2) Se $f, x^k f(x) \in L^1 \implies \hat{f} \in \mathcal{C}^k$

Più velocemente la f tende a 0 per x che tende all'infinito, più regolare sarà $\hat{f}$.

→ Dualità tra le proprietà di f e $\hat{f}$

Es: $\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \dfrac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$

$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(\xi) = -\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\cancel{2}}{1+4\pi^2\xi^2}\right) = \dfrac{1}{\cancel{\pi} i}\left(\dfrac{4\pi^{\cancel{2}}2\xi}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}\right)$

dalla (2): $\mathcal{F}(xf(x)) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$

$= -\dfrac{8\pi i\xi}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}$

$f(x) = xe^{-|x|}$ reale dispari $\Longrightarrow$ $\hat{f}(\xi)$ immag. dispari

$f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ $\quad x^k f(x) \in L^1 \ \forall k \Longrightarrow \hat{f} \in C^k \ \forall k$
$\Longrightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$e^{-|x|} \in C^0$ e deriv. a tratti $\quad xe^{-|x|} \in C^1$ con f' deriv. a tratti
→ posso applicare il teo su $\mathcal{F}(f'')$:

$\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$ per $\xi \to \pm\infty$

→ Data $\hat{f}$ posso ricostruire f?

Possibile formula di inversione: $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$

Se vogliamo sperare che questa valga dovrà essere:

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (perché esista $\hat{f}$)

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (perché esista l'integrale)

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sappiamo che $\hat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$ ma non necessariamente in $L^1(\mathbb{R})$

Teorema (di inversione)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Allora $\boxed{f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Big(f(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x) \qquad \hat{f} \in L^1 \quad \mathcal{F}(\hat{f}) \in C^0_* \Big)$
$= \hat{\hat{f}}(-x) = \check{\hat{f}}(x)$ ↳ riflessa

Conseguenza: sappiamo che se $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$ allora $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) \in C^0_*(\mathbb{R})$

In particolare se $f \in L^1$ ma $f \notin C^0$ certamente $\hat{f} \notin L^1$

Conseguenza: se $f \in L^1$ e supponiamo che $\hat{f} \equiv 0$ $\curvearrowright L^1$

$$f(x) = \mathcal{F}(0)(-x) \implies f \equiv 0$$

L'operatore lineare $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^-_*(\mathbb{R})$ è iniettivo cioè

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \hat{f} = \hat{g} \quad \text{allora} \quad f = g$$

Questo significa che la trasf. di Fourier di f individua univocamente la f.

→ Trasformata delle dilatate

Se $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e $a > 0$ definiamo:

$$f^a(x) = f(ax)$$

$$f_a(x) = \frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}(f^a)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(ax)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2\pi i \frac{\xi}{a} y}\, dy$$

$L^1(\mathbb{R})$

$$= \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \boxed{\hat{f}_a(\xi)}$$

$ax = y, \quad x = \frac{y}{a}, \quad dx = \frac{dy}{a}$

Analogamente: $\boxed{\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \hat{f}^a(\xi)}$

NB: $f_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$

Es (trasformata della gaussiana):

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad \mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x}\, dx = ?$$

Calcoliamo $\hat{f}$ sfruttando le formule su trasformata e derivata

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$$

$f(x) = e^{-x^2}$ $\quad f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -2xf(x)$

$$\underbrace{\mathcal{F}(f'(x))}_{2\pi i \xi \hat{f}(\xi)} = \underbrace{\mathcal{F}(-2xf(x))}_{\frac{1}{\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)}$$

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) \Rightarrow \hat{f}'(\xi) = -2\pi^2 \xi \hat{f}(\xi)$$

eq. diff del prim'ordine

$$\int \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -2\pi^2 \int \xi \, d\xi$$

$$\ln|\hat{f}(\xi)| = -\pi^2\xi^2 + c \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi^2}}$$

$$\hat{f}(\xi) = c_1 e^{-\pi^2\xi^2}$$

$$\hookrightarrow \hat{f}(0) = c_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

E invece $\mathcal{F}(e^{-ax^2})$? $\quad (a>0)$

$f(x) = e^{-x^2} \qquad f^{\sqrt{a}}(x) = e^{-ax^2}$

$$\rightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-ax^2})} = \mathcal{F}(f^{\sqrt{a}}(x)) = \hat{f}_{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\frac{\xi^2}{a}} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}} \qquad \forall a>0$$

Caso particolare: $\quad a = \pi$

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \rightarrow \left[\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2}\right]$$

‖ La funzione $e^{-\pi x^2}$ ha per trasformata se stessa

Gaussiana n-dimensionale

$$\mathcal{F}(e^{-|\vec{x}|^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\, e^{-2\pi i(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\ldots+\xi_nx_n)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \hat{g}(\xi_1)\cdot\hat{g}(\xi_2)\cdot\ldots\cdot\hat{g}(\xi_n) =$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi_1^2}\cdot\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi_2^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi_n^2} = \pi^{\frac{n}{2}}\, e^{-\pi^2|\xi|^2}$$

$$\Longrightarrow \left[\mathcal{F}(e^{-|\vec{x}|^2}) = (\sqrt{\pi})^n e^{-\pi^2|\vec{\xi}|^2}\right] \quad \text{con} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Inoltre è vero anche che $\left[\mathcal{F}(e^{-a|\vec{x}|^2}) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{\pi^2}{a}|\xi|^2}\right]$

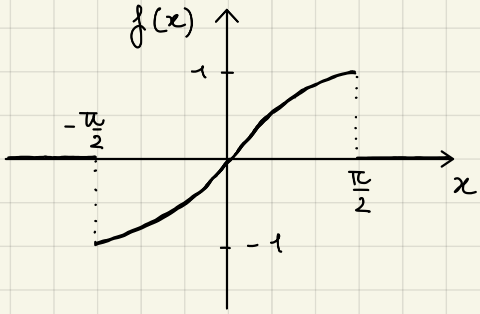
→ Traslazione

$f \in L^1(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}$:

$$\left[\mathcal{F}(f(x)e^{2\pi i a x})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i a x} e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \hat{f}(\xi - a)\right]$$

Analogamente $\left[\mathcal{F}(f(x+a))(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i a \xi}\right]$

Es: $\mathcal{F}(\underbrace{\operatorname{sen} x \, \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x)}_{f}) = ?$



f reale dispari → $\hat{f}$ immag. dispari

$x^n f(x) \in L^1 \ \forall n \to \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$

f discont. → $\hat{f}(\xi) = o(1)$

$$\mathcal{F}(\underbrace{\chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}}_{g(x)})(\xi) = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\pi^2 \xi)}{\pi \xi}}_{\hat{g}(\xi)}$$

$$\mathcal{F}(g(x) \operatorname{sen} x)(\xi) = \mathcal{F}\left(g(x) \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{\underbrace{\operatorname{sen}(\pi^2(\xi - \frac{1}{2\pi}))}_{-\cos(\pi^2\xi)}}{\pi(\xi - \frac{1}{2\pi})} - \frac{\underbrace{\operatorname{sen}(\pi^2(\xi + \frac{1}{2\pi}))}_{\cos(\pi^2\xi)}}{\pi(\xi + \frac{1}{2\pi})}\right]$$

$$= -\frac{\cos(\pi^2\xi)}{2\pi i}\left[\frac{1}{\xi - \frac{1}{2\pi}} - \frac{1}{\xi + \frac{1}{2\pi}}\right] = i \frac{\cos(\pi^2 \xi)}{\pi} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - \frac{1}{4\pi^2}}$$

Analogamente $\mathcal{F}(\cos x \cdot \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}) = -\frac{\cos(\pi^2 \xi)}{2\pi^2\xi^2 - \frac{1}{2}}$

Es: $\mathcal{F}(x e^{-x^2})(\xi) = ?$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x)(-2\pi i x))(\xi)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x) \cdot x)(\xi) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(x e^{-x^2})(\xi) = -i \pi^{3/2} \xi e^{-\pi^2 \xi^2}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}(\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}) = \mathcal{F}(e^{-x^2} x)(\xi)$$

Calcolo di trasf. di Fourier di funz. razionali con metodi di analisi complessa

$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1+x^2}\,dx$ come la calcolo esplicitamente, senza usare le proprietà della trasformata?

la primitiva non è elementare

Vediamo come si calcolano le trasf. di Fourier di funzioni razionali.

Consideriamo una funz. del tipo $p(x)/q(x)$ con

1) p, q polinomi

2) $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) grado di $q \geq$ grado di $p + 1$

Se $gr(q) \geq gr(p) + 2$ allora $\frac{p}{q} \in L^1(\mathbb{R})$

" $gr(q) = gr(p) + 1$ " $\frac{p}{q} \in L^2(\mathbb{R})$

Consideriamo il denominatore $q(x)$. Stiamo supponendo che $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
In compenso esisteranno $z \in \mathbb{C}$ tali che $q(z) = 0$

Def Si dice che il numero $z_0 \in \mathbb{C}$ è un polo di ordine n (con $n = 1, 2, 3 \dots$) per la funz. razionale $p(z)/q(z)$ se $q(z)$ si annulla di ordine n in z_0 e $p(z_0) \neq 0$.

Teorema Sia $p(x)/q(x)$ una funz. razionale dove:

1) p, q sono polinomi

2) $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $gr(q) \geq gr(p) + 1$

$\{k = -2\pi\xi\}$

Allora $\forall k \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_k\right) & \text{se } k > 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_k\right) & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

dove z_k sono i poli di $p(z)/q(z)$ e Res è il residuo della funzione razionale nei suoi poli.

Come si calcola il residuo di una funzione $\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}$ nei suoi poli?

Sia z_0 un polo del 1° ordine per $\frac{p(z)}{q(z)}$

$$\boxed{\text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz},\ z_0\right) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz}\right)}$$

Es: $\text{Res}\left(\frac{z-1}{z^2+4}e^{3iz},\ 2i\right)$ $\qquad z^2+4=0 \to z=\sqrt{-4}=\pm 2i$ poli del 1° ord.

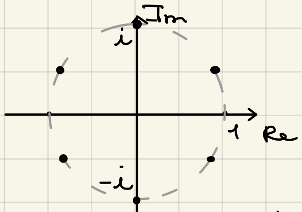
$$= \lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{(z-1)e^{3iz}}{(z+2i)\cancel{(z-2i)}} = \frac{2i-1}{4i}e^{-6}$$

Metodo alternativo per calcolare $\text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz},\ z_0\right)$ se z_0 è un polo del 1° ordine:

$$\boxed{\text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{ikz},\ z_0\right) = \frac{p(z_0)e^{ikz_0}}{q'(z_0)}}$$

Es: $\text{Res}\left(\frac{z^2+3}{z^6+1}e^{2\pi iz},\ i\right) =$ $\qquad z^6+1=0 \to z=\sqrt[6]{-1}$

$$= \left.\frac{(z^2+3)e^{2\pi iz}}{6z^5}\right|_{z=i} = \frac{(-1+3)e^{-2\pi}}{6i} = -i\,\frac{e^{-2\pi}}{3}$$



6 poli distinti

Es: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi x}}{1+x^2}dx$

$z^2+1=0 \longrightarrow z=\pm i$ poli del 1° ordine

$\frac{1}{1+x^2}$ è reale pari, quindi $\hat{f}$ è reale pari.

Basta calcolare $\hat{f}(\xi)$ per $\xi>0$ e poi simmetrizz.

$$k=-2\pi\xi<0 \Longrightarrow \hat{f}^+(\xi) = -2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2},\ -i\right)$$

$$= -2\pi i\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2}$$

$$= -2\pi i\lim_{z\to -i}\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z-i} =$$

$$= -2\pi i\,\frac{e^{-2\pi\xi}}{-2i} = \pi e^{-2\pi\xi}$$

Simmetrizzo $\hat{f}^+$ pari:

$$\Longrightarrow \hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$$

Come si calcola il residuo in poli di ordine $n > 2$?

Sia z_0 un polo di ordine $n = 2, 3, 4 \ldots$ per $p(z)/q(z)$.

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}\right)\Big|_{z=z_0}}$$

Es: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{(1+x^2)^2} dx$

f reale pari $\longrightarrow$ $\hat{f}$ reale pari

$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$ per $\xi \to \pm\infty$ $\forall n$

$x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{f}(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$

$z^2 + 1 = 0 \to z = \pm i$ 2 poli del 2° ordine

Per $\xi > 0$ $(-2\pi\xi < 0)$

$$\hat{f}(\xi) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(1+z^2)^2}, -i\right)$$

$$= -2\pi i \frac{d}{dz}\left(\frac{(z+i)^2 e^{-2\pi i z\xi}}{(z^2+1)^2}\right)\Big|_{z=-i} = -2\pi i \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z-i)^2}\right)\Big|_{z=-i}$$

$$= -2\pi i \left\{ e^{-2\pi i \xi}\left(\frac{-2\pi i \xi (z-i)^2 - 2(z-i)}{(z-i)^4}\right)\right\}$$

$$= -2\pi i \left\{ e^{-2\pi i \xi}\left(\frac{2\pi i \xi (2i) - 2}{(-2i)^3}\right)\right\} = \frac{2\pi i e^{-2\pi\xi}}{8i}(4\pi\xi + 2)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-2\pi\xi}(2\pi\xi + 1) \quad \text{per } \xi > 0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi|\xi|}(2\pi|\xi| + 1) \quad \forall \xi$$

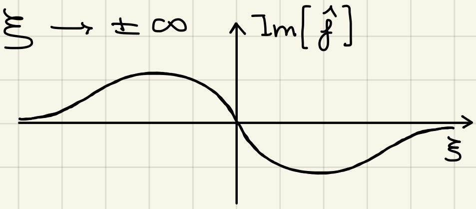
Es: $\mathcal{F}\Big(\underset{\substack{\downarrow \\ f}}{\frac{x}{(1+x^2)^2}}\Big)(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)(\xi) =$

$$= -\frac{1}{2} 2\pi i \xi\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \underset{\substack{\downarrow \\ \hat{f}}}{-i\pi^2 \xi e^{-2\pi|\xi|}}$$

f reale dispari $\longrightarrow$ $\hat{f}$ immag. dispari

$f \in C^\infty \longrightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$ $\forall n$ per $\xi \to \pm\infty$

$x f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{f}(\xi) \in C^1(\mathbb{R})$



NB: se devo calcolare la trasf. di Fourier di una funzione razionale $f(x)$ del tipo $x\,g(x)$ NON è una buona idea applicare le formule

$$\mathcal{F}(x\,g(x)) = -\frac{1}{2\pi i}\,\hat{g}(x)$$

Es: $$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(x+2i)^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{(x+2i)^2}\,dx$$

$$z + 2i = 0 \longrightarrow z = -2i \quad \text{polo del } 2^\circ \text{ ordine}$$

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \xi > 0 \quad (-2\pi\xi < 0), & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+2i)^2}, -2i\right) \\ \xi < 0 \quad (2\pi\xi > 0), & 2\pi i \operatorname{Res}(\ldots, ?) \end{cases}$$

$\varnothing$ non ci sono poli

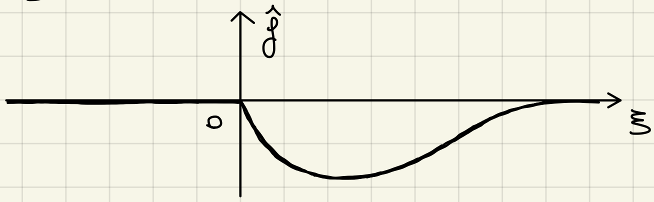
$$= \begin{cases} \xi > 0, & -2\pi i \frac{d}{dz}\left((z+2i)^2 \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+2i)^2}\right)\Big|_{z=2i} \\ \xi < 0, & 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \xi > 0, & -4\pi^2 \xi e^{-4\pi\xi} \\ \xi < 0, & 0 \end{cases}$$

f né pari né dispari $\rightarrow$ $\hat{f}$ non ha simmetrie

$f \in C^\infty \rightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$ per $\xi \to \pm\infty \quad \forall n$

$f \in L^1 \longrightarrow \hat{f} \in C^0_*$



Teoria L^1 della trasformata di Fourier

Pregio: definizione semplice ed esplicita

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i \xi x}\,dx$$

Difetti: l'operatore $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_*(\mathbb{R})$ non ha prop. funzionali così buone

$\mathcal{F}$ non è biunivoco: è iniettivo ma non suriettivo

Il teorema di inversione ha delle limitazioni ($\hat{f} \in L^1$ ma non lo posso sapere a priori)

→ Si vuole estendere la teoria della trasformata di Fourier in L^2:

lasciamoci guidare dalle proprietà duali di $\mathcal{F}$ (regolarità / velocità di conv. a zero all'infinito) per individuare uno sp. di funz. $S \subset (L^1 \cap L^2)$ e per cui si abbia $\mathcal{F}: S \to S$ biunivoca.

Spazio di Schwartz delle funz a decrescenza rapida

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ (\text{o } \mathbb{C}) \ \middle| \ \begin{array}{l} 1)\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ 2)\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall \text{ multi indice } \alpha \\ \quad \lim_{|x| \to +\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} \right| = 0 \end{array} \right\}$$

spazio di classi di funzioni

Caso unidimensionale: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) t.c. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x| \to +\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right| = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$

In altri termini, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e inoltre sia f sia le sue derivate di ogni ordine sono $o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $|x| \to +\infty$, $\forall k$.

La gaussiana è un es. di funzione a decrescenza rapida, così come le funzioni a supporto compatto.

spazio di funzioni

ogni funzione dello spazio più grande è approssimabile bene quanto si vuole da una funzione dello spazio più piccolo

Teorema $S(\mathbb{R}^n)$ è uno sp. vettoriale, denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1, +\infty)$ cioè:

$S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1, +\infty]$ e
$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty)$ $\exists \{f_k\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

$S(\mathbb{R}^n)$ è uno sp. di funz. molto regolari che permettono di approssimare funzioni L^p (in norma L^p) $\forall p \in [1, +\infty)$.
In particolare $S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ quindi $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\exists \hat{f}$.

$S(\mathbb{R}^n)$ non ha una norma "naturale".

$\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\quad \|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} < +\infty, \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < +\infty$

ma nessuna di queste norme "cattura" tutte le proprietà che definiscono $S(\mathbb{R}^n)$ (non esiste una norma che lo renda completo)

<u>Proprietà</u>: se $f \in S(\mathbb{R})$ allora $x^n f(x) \in S(\mathbb{R})$ $\quad$ ($\hat{f} \in C^n$)
e $\frac{d^n}{dx^n} f(x) \in S(\mathbb{R})$ $\forall n = 1, 2 \dots$ $\quad$ ($\hat{f} = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$)

<u>Teorema</u>

1) Sia $f \in S(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ cioè

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$$

2) $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ vale la formula di inversione cioè

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3) $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ è (lineare) biunivoco $\quad$ isomorfismo di spazi vettoriali

4) $\mathcal{F}$ conserva il prod. scalare e la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ cioè:

$$\forall f, g \in S(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}(x)}\,dx$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

In particolare $\mathcal{F}$ (con questa norma in $S(\mathbb{R}^n)$) è un op. lin. continuo con norma 1 (isometria lineare).

($S(\mathbb{R}^n)$ con prod. scalare e norma L^2 è uno sp. pre-hilbertiano, non completo)

<u>Dim</u>: 1) Proviamo che $f \in S(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ $\quad$ $n = 1$, per semplicità

$$f \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \implies \exists \hat{f}$$

$x^n f(x)$ è cont. ed è $o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $x \to \pm\infty$ $\forall k$
quindi $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ $\forall n$ ($\hat{f} \in C^\infty$)

Devo dim. che $|\xi|^n \left|\frac{d^k \hat{f}(\xi)}{d\xi^k}\right| \longrightarrow 0$ per $|\xi| \to \infty$

$$\frac{d^k \hat{f}(\xi)}{d\xi^k} = \mathcal{F}\big(\underbrace{(-2\pi i x)^k f(x)}_{g}\big)(\xi) = \hat{g}(\xi) \quad \text{con } g \in S(\mathbb{R})$$

c. $x^k f(x) \in S(\mathbb{R})$

Allora devo mostrare che $|\xi|^n \hat{g}(\xi) \to 0$ per $|\xi| \to \infty$.

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n g(x)}{dx^n}\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{g}(\xi) \in C^0_*(\mathbb{R}) \text{ ovvero:}$$

$\overset{\cap}{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ $\qquad$ $c \cdot \xi^n \hat{g}(\xi) \to 0$ per $\xi \to \pm\infty$ ✓

2) $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$
quindi poiché f e $\hat{f}$ stanno in L^1 vale la formula di inversione

3) $\mathcal{F}$ é lineare e iniettiva (su tutto L^1).
Dobbiamo provare che $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ é suriettiva

ovvero: $\forall g \in S(\mathbb{R})$ $\exists f \in S(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{f} = g$

Per g assegnato, cerco f t.c. $\hat{f} = g$

Se $\hat{f}(x) = g(x)$ allora $\hat{\hat{f}}(x) = \hat{g}(x)$ ma $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ e quindi la f che cerco deve essere $f(x) = \hat{g}(-x)$.

↳ ho trovato la f.

4) Mostriamo che $\forall f, g \in S(\mathbb{R})$ é $\int_{\mathbb{R}} f\bar{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\bar{\hat{g}}$

da questo ponendo $f = g$ $\quad \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2\right)^{1/2}$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Abbiamo visto che:

$\forall f, g \in L^1$ é $\int_{\mathbb{R}} f \cdot \hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g \to \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\,\bar{\hat{g}} = \int_{\mathbb{R}} f\,\hat{\bar{\hat{g}}}$

bisogna dim. che $\bar{g} = \hat{\bar{\hat{g}}}$

$$\bar{\hat{g}}(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i x y} dy} = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(y)} e^{2\pi i x y} dy = \hat{\bar{g}}(-x)$$

$$\to \hat{\bar{\hat{g}}}(x) = \hat{\hat{\bar{g}}}(-x) = \bar{g}(x) \checkmark$$

$\forall f \in S(\mathbb{R})$ valgono tutte le identità sulla trasformata di Fourier viste finora, senza ipotesi aggiuntive.

Vediamo come, grazie alle proprietà di $\mathcal{F}$ su $S(\mathbb{R}^n)$, é possibile definire $\mathcal{F}$ su $L^2(\mathbb{R}^n)$ e provarne le buone proprietà

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Voglio definire $\hat{f}$

Faccio così: sia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $f_k \xrightarrow{L^2} f$, $\|f_k - f\|_{L^2} \to 0$ *

(si può fare perché $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$)

Calcoliamo $\hat{f}_k$. Considero la succ. $\{\hat{f}_k\} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$. ($\subseteq S \subseteq L^2$)

Se dimostro che $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy in L^2, esisterà $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\hat{f}_k \xrightarrow{L^2} g$.

che è completo

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}^n) & & L^2(\mathbb{R}^n) \\ f_k \; ② & \xrightarrow{L^2} & f \; ① \\ \mathcal{F} \downarrow & & \\ \hat{f}_k \; ③ & \xrightarrow{L^2} & g = \hat{f} \; ④ \end{array}$$

f_k è conv. per hp. *
se è conv. allora è anche di Cauchy

Mostriamo che $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f_k - f_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k - f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k,m \to \infty} 0$$

linearità di $\mathcal{F}$ $\quad (f_k - f_m) \in S(\mathbb{R}^n) \quad$ su $S(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}$ è un'isometria

Quindi $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy, $\exists g \in L^2$ t.c. $\|\hat{f}_k - g\|_{L^2} \xrightarrow{k \to \infty} 0$

Porremo, per definizione, $\hat{f} =: g$.

<u>Problema</u>: siamo sicuri che il limite non dipende dalla particolare successione f_k scelta?

Se prendo una diversa succ. $\{f_k^*\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c.

$\|f_k^* - f\|_{L^2} \to 0$ allora come prima $\exists g^* \in L^2$ t.c.

$\hat{f}_k^* \xrightarrow{L^2} g^*$. È vero che $g^* = g$? Mostriamo che è così.

$$\|\hat{f}_k^* - \hat{f}_k\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f_k^* - f_k)\|_{L^2} = \|f_k^* - f_k\|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad \text{perché} \quad \begin{matrix} f_k \\ f_k^* \end{matrix} \rightarrow f$$

Quindi anche $\hat{f}_k^*$ e $\hat{f}_k$ hanno lo stesso limite g.

In sintesi: utilizzando il fatto che $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e che $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ è un'isometria lineare abbiamo dimostrato che $\mathcal{F}$ si può estendere univocamente a un operatore $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema (proprietà di $\mathcal{F}$ su L^2)

L'operatore $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ è lineare, biunivoco, conserva il prod. scalare e la norma.

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è $\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \bar{\hat{g}}$ e $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

$\mathcal{F}$ è un'isometria lineare di sp. di Hilbert.

$\forall f \in L^2$ vale la formula di inversione, cioè

$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x)$ in L^2 cioè per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i due modi di definire la trasf. di Fourier coincidono.

In pratica, data $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ come calcolo $\hat{f}$?

Sfruttiamo la continuità dell'operatore $\mathcal{F}$ e il fatto che se $f \in L^1 \cap L^2$ allora $\hat{f}$ si calcola come in L^1.

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Si verifica che: 1) $f_k \in L^1 \cap L^2$

2) $f_k \to f$ in L^2

$$\left[\hat{f}(\xi) = \lim_{k \to +\infty} \hat{f}_k(\xi) = \lim_{k \to +\infty} \int_{|y|<k} f(y)\, e^{-2\pi i \xi y}\, dy\right] \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Es: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \in C^0_*(\mathbb{R})$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R})$

$f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{k \to \infty} \int_{|y|<k} \frac{y}{1+y^2}\, e^{-2\pi i \xi y}\, dy \quad \circledast$$

Quando f è una funzione razionale che ha grado del denominatore $\geq$ grado del numeratore $+1$ e denominatore $\neq 0$ in $\mathbb{R}$, il calcolo di $\hat{f}$ col metodo dei residui fornisce esattamente l'integrale $\circledast$.

Quindi il metodo dei residui fornisce la trasf. di Fourier corretta anche per una funzione razionale che sta in $L^2 \setminus L^1$.

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ reale dispari $\longrightarrow \hat{f}$ immag. dispari

$f \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ (ma non è detto che $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$)

definita q.o.

Calcolo per $\xi > 0$ poi simmetrizzo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \overset{-2\pi\xi<0}{=} -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{1+z^2} e^{-2\pi i z \xi}, -i\right)$$

$\pm i$ poli 1° ord.

$$= -2\pi i \left\{ \frac{z e^{-2\pi i \xi z}}{2z} \right\}\Big|_{z=-i} = -\pi i e^{-2\pi\xi} \quad \text{per } \xi > 0$$

$$\Longrightarrow \hat{f}(\xi) = -\pi i e^{-2\pi|\xi|} \operatorname{sign}(\xi) \quad \text{discontinua!}$$

Es: $f(x) = \frac{1}{x+ai}$, $a > 0$

$f \in L^2$ ma $f \notin L^1$, non ha simmetrie

$z + ai = 0 \longrightarrow z = -ai$ polo del 1° ord.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x+ai} dx = \begin{cases} -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z+ai}, -ai\right) & \xi > 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\pi i \left(e^{-2\pi i \xi z}\right)\Big|_{z=-ai} = -2\pi i e^{-2\pi\xi a} & \xi > 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \hat{f}(\xi) = -\chi_{(0,+\infty)}(\xi)\, 2\pi i e^{-2\pi\xi a} \quad \text{immaginaria e discontinua!}$$

Esercizi:

- $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ $\qquad f \in \mathcal{C}^0_* \cap L^1 \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}^0_*$

$f \in \mathcal{C}^\infty \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$ per $\xi \to \pm\infty \quad \forall n$

$f \in L^1 \wedge x f(x) \notin L^1 \rightarrow$ mi aspetto $\hat{f} \notin C^1$

$f \in \mathbb{R}$ ma non ha simmetrie $\rightarrow$ non mi aspetto simmetrie di $\hat{f}$

Metodo dei residui:

$z^2+z+1=0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ poli del 1° ordine

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x^2+x+1} dx = \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2+z+1}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{2z+1}\right)\Big|_{z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} \\ \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{2z+1}\right)\Big|_{z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \xi > 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{2\pi i \xi\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}}{i\sqrt{3}}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi\left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}}{i\sqrt{3}}\right) \end{cases} = \begin{cases} \xi > 0 & \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{-\pi\sqrt{3}\xi} \\ \xi < 0 & \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{\pi\sqrt{3}\xi} \end{cases}$$

$$= \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|}}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}$$

$f \in \mathbb{R}$ senza simmetrie $\longrightarrow$ non mi aspetto simmetrie da $\hat{f}$

$$\left.\begin{array}{l} f \in L^1 \\ x f(x) \in L^1 \\ x^2 f(x) \in L^1 \\ x^3 f(x) \notin L^1 \end{array}\right\} \quad \hat{f} \in C^2 \cap C^0_* \text{ mi aspetto } \hat{f} \notin C^3$$

$$f \in C^\infty \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \text{ per } \xi \rightarrow \pm\infty \ \forall n$$

Metodo dei residui:

$(z^2+2z+3)^2 = 0 \longrightarrow z = -1 \pm i\sqrt{2}$ poli del 2° ordine

$$\hat{f}(\xi) = \int \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{(x^2+2x+3)} dx = \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+2z+3)^2}, -1-i\sqrt{2}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\dots, -1+i\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$$(z^2+2z+3)^2 = (z+1+i\sqrt{2})^2\,(z+1-i\sqrt{2})^2$$

$$= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^{-2\pi i \xi z}\cdot \cancel{(z+1+i\sqrt{2})^2}}{\cancel{(z+1+i\sqrt{2})^2}\,(z+1-i\sqrt{2})^2}\right)\Bigg|_{z=-1-i\sqrt{2}} \\ \xi < 0 & 2\pi i \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z+1+i\sqrt{2})^2}\right)\Bigg|_{z=-1+i\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\xi > 0$: $$\hat{f}(\xi) = -2\pi i\, e^{2\pi i \xi}\, e^{-2\pi\sqrt{2}\xi}\, \frac{(-2)(2\pi\sqrt{2}\xi+1)}{-8(-i)\,2\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\, e^{2\pi i\xi}\, e^{-2\pi\sqrt{2}\xi}\,(2\pi\sqrt{2}\xi+1)$$

$\xi < 0$: $$\hat{f}(\xi) = 2\pi \cancel{i}\, e^{-2\pi i \xi(-1+\sqrt{2})}\,\frac{(\cancel{-}2)(\pi i\xi(2\sqrt{2})+1)}{(2\cancel{i}\sqrt{2})^3} =$$
$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\, e^{2\pi i\xi}\, e^{2\pi\sqrt{2}\xi}\,(1-2\pi\sqrt{2}\xi)$$

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\, e^{2\pi i \xi}\, e^{-2\pi\sqrt{2}|\xi|}\,(1+2\pi\sqrt{2}|\xi|)}$$

- $\mathcal{F}(x\,\mathcal{F}(e^{-x^4})) = ?$ non serve calcolare $\mathcal{F}(e^{-x^4})$!

$f(x) = e^{-x^4} \in S(\mathbb{R})$ f reale e pari

$\Longrightarrow$ $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ reale pari

$g(x) = x\hat{f}(x)$ sarà reale, dispari e $g \in S(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ $\hat{g}(\xi)$ sarà immag. dispari e $\hat{g} \in S(\mathbb{R})$

$\frac{d}{d\xi}\hat{h}(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x h(x))$

$$\mathcal{F}(x h(x))(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{h}(\xi)$$

f è pari e $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$

$$\mathcal{F}(x\hat{f}(x))(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{\hat{f}}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}f(\xi)$$
$$= \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\xi}(e^{-\xi^4}) = \frac{i}{2\pi}(-4\xi^3)\,e^{-\xi^4} = \boxed{-\frac{2i}{\pi}\xi^3 e^{-\xi^4}}$$

- $f(x) = \cos x\, e^{-|x|}$

f reale pari $\rightarrow$ $\hat{f}$ reale pari

$x^n f(x) \in L^1$ $\forall n$ $\rightarrow$ $\hat{f} \in C^\infty$

f continua e regolare a tratti $\longrightarrow$ $\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi}\right)$ per $\xi \to \pm\infty$

$$\mathcal{F}\left(f(x)e^{2\pi i a x}\right)(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$$

$$\mathcal{F}\left(f(x)\cos x\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(f(x)\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)(\xi)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{f}\left(\xi - \frac{1}{2\pi}\right) + \hat{f}\left(\xi + \frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \hat{f}(x) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\cos x\right) = \frac{1}{1+(2\pi\xi-1)^2} + \frac{1}{1+(2\pi\xi+1)^2}}$$

Una proprietà della trasf. di Fourier in L^2

Teorema (Principio di indeterminazione di Heisenberg)

Sia $f \in S(\mathbb{R})$. Allora:

$$\underbrace{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}_{=\|\hat{f}\|^2_{L^2}} \leq 4\pi\left(\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}$$

Tra tutte le funzioni f che hanno una fissata $\|f\|_{L^2}$ quelle per cui $\int x^2|f(x)|^2\,dx$ è piccolo avranno $\int \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi$ grande, e viceversa.

$\Longrightarrow$ Una funzione f e la sua trasf. di Fourier non possono essere simultaneamente "molto concentrate": se una delle 2 ha un grafico concentrato, l'altra sarà molto dispersa.

Se f è un segnale nel tempo, se f ha durata limitata, allora $\hat{f}$ non avrà banda limitata

In meccanica quantistica, se $f(x)$ è la funzione d'onda di una particella che si muove sulla retta

- $|f(x)|^2$ è la densità di probabilità di trovare la particella nel punto x
- $|\hat{f}(\xi)|^2$ è la densità di probabilità che il momento della particella sia ξ

Dim: $\| f \|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot | f(x)|^2 dx = \left[x |f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} (|f(x)|^2) dx =$

0 perché $f \in S(\mathbb{R})$

$$= -\int_{\mathbb{R}} x \underbrace{(f(x) \overline{f(x)})'}_{f'\bar{f} + f \cdot \bar{f}' = f'\bar{f} + \overline{\bar{f} f'} = 2\,\mathrm{Re}[f'\bar{f}]} dx$$

$x + \bar{x} = 2\,\mathrm{Re}[x]$

$$\leq \left| 2\,\mathrm{Re}\left[\int_{\mathbb{R}} x f'(x) \overline{f(x)} dx \right] \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |f'(x)| |f(x)| dx$$

disug. di Schwartz

$$\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$\| f' \|_{L^2} = \| \mathcal{F}(f') \|_{L^2} = \| 2\pi i \xi \hat{f} \|_{L^2} = 2\pi \| \xi \hat{f} \|_{L^2}$

$$\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \checkmark$$

Se trovo una $f(x) \in S(\mathbb{R})$ per cui si ha:

$$\| f \|^2_{L^2} = 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \circledast$$

vuol dire che la disuguaglianza è ottimale, cioè non è migliorabile.

→ $\forall \alpha > 0$ la funzione $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ soddisfa $\circledast$

Verifichiamolo per $\alpha = \pi$:

$f(x) = e^{-\pi x^2}$ $\qquad \hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} = f(\xi)$

$$4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = 4\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx =$$

$$= 4\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} (-x) (\underbrace{-4\pi x e^{-2\pi x^2}}_{(e^{-2\pi x^2})'}) dx =$$

$$= \cancel{\left[-x e^{-2\pi x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{\mathbb{R}} (-e^{-2\pi x^2}) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 dx = \| f \|^2_{L^2}$$

Verifichiamolo per $\forall \alpha > 0$:

$g(x) = e^{-\alpha x^2}$ $\qquad g\left(x \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = g^{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(x) = e^{-\alpha \frac{\pi}{\alpha} x^2} = e^{-\pi x^2} = f(x)$

$$\mathcal{F}\left(g^{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(x)\right)(\xi) = \left(\hat{g}(\xi)\right)_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, \hat{g}\left(\xi \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right) = \hat{f}(\xi)$$

$x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}y,\ dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}dy$

$$\|g\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}}\left|g\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}x\right)\right|^2\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}|g^{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(x)|^2dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx$$

$$= \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\cdot 4\pi\left(\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\cdot 4\pi\left(\int_{\mathbb{R}}x^2|g^{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(x)|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}\xi^2|(\hat{g}(\xi))_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}|^2d\xi\right)^{1/2}$$

$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}x=y$, $dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}dy$

$$= \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\cdot 4\pi\left(\int_{\mathbb{R}}x^2\left|g\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}x\right)\right|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}\xi^2\left|\sqrt{\tfrac{\alpha}{\pi}}\,\hat{g}\left(\sqrt{\tfrac{\alpha}{\pi}}\xi\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2}$$

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\xi=z$, $d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}z$

$$= \cancel{\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}}\cdot 4\pi\left(\int_{\mathbb{R}}\tfrac{\alpha}{\pi}y^2|g(y)|^2\sqrt{\tfrac{\alpha}{\pi}}dy\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\cancel{\tfrac{\pi}{\alpha}}z^2\cdot\cancel{\tfrac{\alpha}{\pi}}|\hat{g}(z)|^2\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}dz\right)^{1/2}$$

$$= 4\pi\left(\int_{\mathbb{R}}x^2|g(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\ \checkmark$$

Trasformata di Laplace

Limiti della trasformata di Fourier:

considero l'eq. diff. $y''+\omega^2y=0$ (eq. dell'oscillatore armonico)

integrale generale: $y(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$.

Affronto l'eq. con Fourier:

$$\mathcal{F}(y''+\omega^2y)=0 \ \to\ (2\pi i\xi)^2\hat{y}+\omega^2\hat{y}=0$$

$$\hat{y}(\omega^2-4\pi\xi^2)=0$$

$$\Longrightarrow\ \hat{y}\equiv 0\ \Longrightarrow\ y(t)\equiv 0$$

trovo solo la funz. identicamente nulla

Infatti, nessuna delle soluzioni non banali è Fourier-trasformabile (sen e cos non sono L-integrabili)

Nessuna funz. elementare x^α, a^x, $\log x$ è $L^1(\mathbb{R})$!

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$$ non aiuta la convergenza dell'integrale

Trasformata di Laplace: usa come nucleo integrale una funz. che aiuti l'integrabilità di f all'infinito.

$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $\qquad \mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

se $s > 0$
aiuta la convergenza

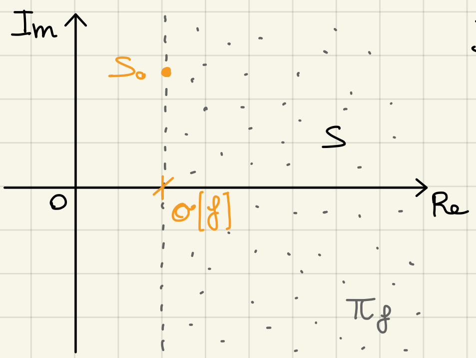
Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), f misurabile e Lebesgue-integrabile su ogni intervallo del tipo $[0, K]$ per $K > 0$.
Si dice che f é Laplace-trasformabile se $\exists\, s_0 \in \mathbb{C}$ tale che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\, dt$$

sia convergente (per Lebesgue, ovvero: $\int_0^{+\infty} |e^{-s_0 t} f(t)|\, dt < +\infty$)

$$s_0 = \sigma_0 + \omega_0 i \qquad |e^{-s_0 t}| = |e^{-\sigma_0 t} e^{-\omega_0 i}| = e^{-\sigma_0 t}$$

Se $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} |f(t)|\, dt < +\infty$ a maggior ragione sará
$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt < +\infty$ se $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\} = \sigma_0$



Def: Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile. Si definisce ascissa di convergenza di f il numero reale

$$\left[\sigma[f] = \inf\left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)|\, dt < +\infty \right\}\right]$$

Semipiano di convergenza $\left[\pi_f = \{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}[s] > \sigma[f] \}\right]$

Teorema Se f é $\mathcal{L}$-trasformabile $\forall s \in \pi_f$ esiste finito

$$\boxed{\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

detta trasf. di Laplace di f.

Il fatto che $s \in \mathbb{C}$ mette in evidenza una relazione tra trasf. di Laplace e di Fourier

$$\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t(\sigma + i\omega)}\, dt = \int_0^{+\infty} [f(t)\, e^{-t\sigma}]\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\underset{\mathbb{C}}{s} = \underset{\mathbb{R}}{\sigma} + i\, \underset{\mathbb{R}}{\omega}$$

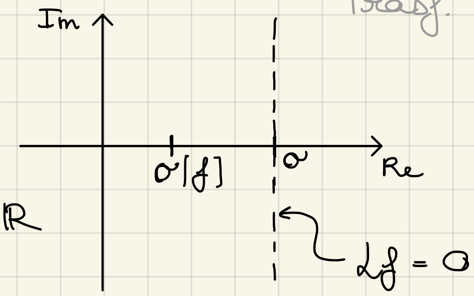
Introduciamo la funzione "gradino" $\left[u(t) = \chi_{(0,+\infty)}(t)\right]$

$$\boxed{\mathcal{L}f(\sigma+i\omega)} = \int_{\mathbb{R}} \left[u(t)\, f(t)\, e^{-t\sigma}\right] e^{-i\omega t}\, dt \overset{\omega = 2\pi\xi}{=} \boxed{\mathcal{F}\left[u(t) f(t)\, e^{-t\sigma}\right]\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$

↳ la trasf. di $\mathcal{L}$ eredita le propr. (e.g. iniettività) dalla trasf. di $\mathcal{F}$.

Sia $\sigma > \sigma[f]$ con f $\mathcal{L}$-Trasformabile e supponiamo che sia

$\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$



$\Longrightarrow \mathcal{F}\left[u(t) f(t)\, e^{-t\sigma}\right] = 0$

$\Longrightarrow u(t) f(t)\, e^{-t\sigma} = 0$ per q.o. $t \in \mathbb{R}$

$f(t) = 0$ per q.o. $t > 0$

Teorema Se f è una funz. $\mathcal{L}$-trasf. e per un certo $\sigma > \sigma[f]$ risulta $\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ allora $f(t) = 0$ per q.o. $t > 0$

Corollario Se f, g sono 2 funz. $\mathcal{L}$-Trasf. e per un certo $\sigma > \max(\sigma[f], \sigma[g])$ risulta $\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = \mathcal{L}g(\sigma + i\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ allora $f(t) = g(t)$ per q.o. $t > 0$

$$f(t) = e^{3t} \quad \xrightarrow{\text{eguali}} \quad f(t) = \begin{cases} e^{3t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ogni f viene moltiplicata per $u(t)$

Es: $f(t) = 1$ $\left(\text{cioè } f(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t)\right)$

$$\mathcal{L}(1)(s) = \mathcal{L}(u(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

Es: $f(t) = e^{at} \qquad a \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{a\}$$

purché $\mathrm{Re}\{s-a\} > 0$
$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{a\}$ affinché l'integr. converga

$\longrightarrow a = i\omega$

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) = \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin \omega t$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\cos\omega t)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\longrightarrow a = \alpha + i\omega$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} e^{i\omega t})(s) = \frac{1}{s-(\alpha+i\omega)} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2} + i\,\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos t)(s) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}\sin t)(s) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

Es: $f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t^n\, dt = \cancel{\left[t^n \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{s} dt$$

$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$$= \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1})(s)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{a\}$$

$$\mathcal{L}(\cos\omega t)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}(\sin\omega t)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

Criterio di trasformabilità

Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ misurabile e a crescita al più esponenziale, ossia: $\exists\, c, \alpha > 0$ t.c.

$$|f(t)| \leq c\, e^{\alpha t} \quad \forall t > 0.$$

Allora f è $\mathcal{L}$-trasformabile (ad es: $f(t) = e^{t^2}$ NON è $\mathcal{L}$-trasformab.)

Teorema (proprietà della trasf. di Laplace)

Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora:

1) $\mathcal{L}f(s) \to 0$ per $Re\{s\} \to +\infty$

$\mathcal{L}f$ limitata

2) $\forall \sigma_0 > \sigma[f]$ $\exists c > 0$ t.c. $|\mathcal{L}f(s)| \leq c$ $\forall s \,|\, Re\{s\} \geq \sigma_0$

3) $\mathcal{L}f \in C^\infty(\pi_f)$ (derivabile anche in senso complesso)
e $\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s)$ $\forall s \,|\, Re\{s\} > \sigma[f]$

Es: $\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = ?$

$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$ e $\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(e^{at})(s) = \mathcal{L}((-t)^n e^{at})(s)$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = (-1)^n \mathcal{L}((-t)^n e^{at}) = (-1)^n \underbrace{\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right)}_{\frac{(-1)^n n!}{(s-a)^{n+1}}} =$$

$$= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Es: $\mathcal{L}(t e^{2t} \sin 3t)(s) = ?$

$\mathcal{L}(e^{2t}\sin 3t)(s) = \frac{3}{(s-2)^2+3^2}$ e $\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{2t}\sin 3t)(s) =$
$= \mathcal{L}(-t\, e^{2t}\sin 3t)(s)$

$$\mathcal{L}(t e^{2t}\sin 3t)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{2t}\sin 3t)(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s-2)^2+9}\right) = \frac{6(s-2)}{((s-2)^2+9)^2}$$

Convoluzione di segnali

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $\quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy$

Se $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) segnali: $f(t)u(t)$, $g(t)u(t)$

$$(fu * gu)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)\underbrace{u(t-\tau)}_{t-\tau>0}\, g(\tau)\underbrace{u(\tau)}_{\tau>0}\, d\tau$$

$\boxed{0<\tau<t}$

$$\Longrightarrow \boxed{(f*g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}}$$

Teorema Se $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ misurabili e f, g sono integrabili su ogni intervallo $[0, K]$ per $K>0$, allora $f*g$ è ben definito $\forall t>0$ e $f*g$ è integrabile in ogni $[0,K]$ per $K>0$

Es: $(u * u)(t) = \int_0^{+\infty} u(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t d\tau = t \cdot u(t) =$ "rampa"

$\hookrightarrow \neq 0$ sse. $\tau < t$

Es: $(t * t)(t) = \int_0^{\infty} (t-\tau)\,u(t-\tau)\,\tau\, u(\tau)\,d\tau$

$$= \int_0^t (t-\tau)\,\tau\, d\tau = \left[t \cdot \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{6}\, u(t)$$

Teorema (trasf. di Laplace della convoluzione)

Siano f, g due segnali $\mathcal{L}$-trasf. Allora anche $f*g$ lo è e $\forall s$ t.c. $\mathrm{Re}\{s\} > \max(\sigma[f], \sigma[g])$

$$\boxed{\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s)}$$

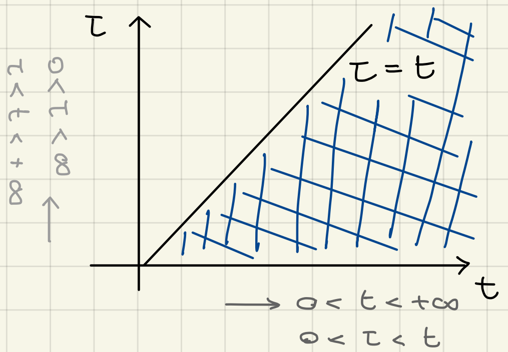
Dim: $\mathcal{L}(f*g)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right)dt =$$

$0 < t < +\infty$
$0 < \tau < t$

$$\overset{\#}{=} \int_0^{\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \tau > 0}}{g(\tau)} \left(\int_\tau^{\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ t-\tau>0}}{f(t-\tau)}\, e^{-st}\,dt\right)d\tau =$$

$0 < \tau < +\infty$
$\tau < t < +\infty$



$$= \int_0^{+\infty} g(\tau)\left(\int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-s(\tau+u)}\,du\right)d\tau$$

$t - \tau = u$
$dt = du$

$$= \int_0^{+\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau}\,d\tau \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-su}\,du =$$

$$= \mathcal{L}g(s) \cdot \mathcal{L}f(s)$$

\# per garantire questo passaggio applico Fubini-Tonelli, cioè controllo che converga l'integ. iterato del modulo

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)|\, e^{-\tau \mathrm{Re}\{s\}}\,d\tau \cdot \int_0^{+\infty} |f(u)|\, e^{-u\mathrm{Re}\{s\}}\,du < +\infty$$ poiché per hp.:

$|e^{-s\tau}| = e^{-\mathrm{Re}\{s\}\tau}$

$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma[f]$ e $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma[g]$

Es: $\mathcal{L}(t * t * \ldots * t)(s) = (\mathcal{L}(t)(s))^n = \left(\frac{1}{s^2}\right)^n = \frac{1}{s^{2n}} = \mathcal{L}(\,?\,)(s)$

ma $\quad \mathcal{L}(t^k)(s) = \dfrac{k!}{s^{k+1}} \longrightarrow \begin{aligned} 2n &= k+1 \\ k &= 2n-1 \end{aligned}$

$$\mathcal{L}(t^{2n-1})(s) = \frac{(2n-1)!}{s^{2n}}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)(s) = \frac{1}{s^n} \Longrightarrow \left[\underbrace{t * t * \dots * t}_{n \text{ volte}} = \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]$$

iniettività della trasf.

Teorema (trasf. di Laplace dell'integrale)

Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasf. e sia $F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$.
Allora F è $\mathcal{L}$-trasf. e $\forall s$ t.c. $Re\{s\} < \max(\sigma[f], 0)$ si ha

$$\boxed{\mathcal{L}F(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}}$$

$\mathcal{L}(f') = ?$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\, d\tau \longrightarrow \mathcal{L}(f(t) - f(0)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f'(\tau)\, d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}f'(s)}{s}$$

$f \in C^1(0, +\infty)$ o almeno: $f \in C^0[0, +\infty)$ e f derivabile a tratti

Teorema (trasf. di Laplace della derivata)

Sia $f \in C^0[0, +\infty)$ derivabile a tratti e f' sia $\mathcal{L}$-trasf.
Allora anche f è $\mathcal{L}$-trasf e $\forall s$: $\max(\sigma[f'], 0)$ si ha

$$\boxed{\mathcal{L}f'(s) = s\,\mathcal{L}f(s) - f(0)}$$

$$\mathcal{L}f''(s) = s\,\mathcal{L}f'(s) - f'(0) = s^2\,\mathcal{L}f(s) - s f(0) - f'(0)$$

Teorema (trasf. di Laplace della derivata n-esima)

Sia $f \in C^{n-1}[0, +\infty)$ e sia $f^{(n-1)}$ derivabile a tratti e sia $f^{(n)}$ $\mathcal{L}$-trasf. Allora sono $\mathcal{L}$-trasf. anche $f, f', \dots, f^{(n)}$ e vale:

$$\boxed{\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n\,\mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

Osservazioni sulla rapidità di convergenza a zero di $\mathcal{L}f(s)$ per $Re\{s\} \to +\infty$:

Sappiamo che $\forall f$ $\mathcal{L}$-trasf è $\mathcal{L}f(s) \to 0$ per $Re\{s\} \to +\infty$

Se f soddisfa le hp. dell'ultimo teorema, ho che

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) \to 0 \quad \text{per } Re\{s\} \to +\infty$$

quindi anche $s^n \mathcal{L}f(s) - \{s^{n-1}f(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\}$ tenderà a zero.

regolarità di f in 0

Se $\{\ldots\}$ fosse zero, avrei che $s^n \mathcal{L}f(s) \to 0$ per $Re\{s\} \to +\infty$

cioè $\mathcal{L}f(s) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $Re\{s\} \to +\infty$

Teorema Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $f \equiv 0$ per $t<0$ e $f^{(n-1)}$ deriv. a tratti con $f^{(n)}$ $\mathcal{L}$-trasf.

Allora $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}f(s)$ e in particolare $\mathcal{L}f(s) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $Re\{s\} \to +\infty$

Ritardo nel dominio di Laplace (formula di s-shift)

Sia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasf. e calcoliamo:

$$\mathcal{L}(f(t)e^{at})(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{at} e^{-st}\, dt = \mathcal{L}f(s-a), \quad Re\{s-a\} > \sigma[f]$$

Teorema Sia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasf. Allora $\forall a \in \mathbb{C}$ anche $f(t)e^{at}$ è $\mathcal{L}$-trasf e:

$$\mathcal{L}(f(t)e^{at}) = \mathcal{L}f(s-a) \quad \forall s \text{ t.c. } Re\{s\} > Re\{a\} + \sigma[f]$$

Es: calcolare $\underbrace{e^{-t} * e^{-t} * \ldots * e^{-t}}_{n \text{ volte}}$

$$\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(\underbrace{e^{-t} * \ldots * e^{-t}}_{n \text{ volte}})(s) = (\mathcal{L}(e^{-t})(s))^n = \frac{1}{(s+1)^n} = \mathcal{L}(\,?\,)$$

$$\mathcal{L}(t^k e^{at})(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \qquad a=-1, \qquad \begin{aligned} k+1 &= n \\ k &= n-1 \\ k! &= (n-1)! \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(s-1)^n} = \mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}\right)(s)$$

$$\Big[\underbrace{e^{-t} * \dots * e^{-t}}_{n \text{ volte}} = \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}\Big]$$

Metodo della trasf. di Laplace per risolvere problemi per equazioni differenziali ordinarie (lineari, a coeff. costanti)

$\longrightarrow \quad a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Senza l'uso della trasf. di Laplace:

1) risolvo l'eq. omogenea $\quad f(t) \equiv 0$

2) " " completa (col metodo di somiglianza) quando f ha una forma particolare.

$\rightarrow$ La trasf. di Laplace permette di trattare termini noti $f(t)$ "qualsiasi"

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} a y'' + b y' + c y = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ assegnate.} \\ &f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{L}\text{-trasformabile.} \end{aligned}$$

Applichiamo $\mathcal{L}$:

indichiamo $\quad Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s) \qquad F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$

per le formule della derivata si ha

$$a\left(s^2 Y(s) - s\, y(0) - y'(0)\right) + b\left(s Y(s) - y(0)\right) + c Y(s) = F(s)$$

$$Y(s)\,(as^2 + bs + c) = F(s) + a y_0 s + a y_1 + b y_0$$

$$Y(s) = F(s)\underbrace{\left(\frac{1}{as^2+bs+c}\right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{ay_0 s + ay_1 + by_0}{as^2+bs+c}\right)}_{G(s)}$$

Il problema di Cauchy determina univocamente $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ e quindi " " $y(t)$.

Per calcolare $y(t)$ devo antitrasf. il 2° termine dell'uguaglianza

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s), \quad H(s) \text{ e } G(s)$$

Supponiamo di aver trovato 2 funzioni $h(t)$ e $g(t)$ tali che.

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = H(s) \qquad \mathcal{L}(g(t))(s) = G(s)$$

$$Y(s) = H(s)\cdot F(s) + G(s) = \mathcal{L}(f * h) + \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f*h+g)$$

$$y(t) = (f*h)(t) + g(t)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + g(t)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{as^2+bs+c}\right)$$ dipende solo da a, b, c cioè dal sistema, NON dalle condizioni iniziali, NON dal termine noto

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{ay_0 s + ay_1 + by_0}{as^2+bs+c}\right)$$ dipende da a, b, c e dalle condizioni iniziali.

$g(t) \equiv 0$ se $y_0 = y_1 = 0$

Il problema è ricondotto a saper antitrasformare funzioni razionali del tipo $\dfrac{\alpha s + \beta}{as^2+bs+c}$

Se avessi un'eq. diff. ord. lin. di ordine $n > 2$, a coeff. costanti

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

a_i, y_i assegnati

f $\mathcal{L}$-trasformabile

Applicando $\mathcal{L}$:

$$a_n(s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - \dots - y_{n-1}) + \dots + a_0 Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) \cdot (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = F(s) \cdot q_{n-1}(s)$$

polinomio di gr. $n-1$ che dipende dalle condizioni iniziali

$$Y(s) = \underbrace{F(s)\left(\frac{1}{q_n(s)}\right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{p_{n-1}(s)}{q_n(s)}\right)}_{G(s)}$$

$p_n(s)$: polinomio di gr. n che NON dipende dalle cond. iniziali

Il problema si riconduce a saper antitrasformare funzioni razionali in cui il denominatore ha grado n e il numeratore ha grado $\leq n-1$

$$\boxed{\frac{\alpha s + \beta}{a s^2 + bs + c}}$$

Ricordiamoci:

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\cos\omega t)(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\operatorname{sen}\omega t)(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

<u>Esempi</u> (antitrasformata di funzioni razionali):

1) $$\frac{2s+1}{s^2+2s-3} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+3} = \frac{as - 3a + bs - b}{s^2 + 2s - 3}$$

$$\begin{cases} as + bs = 2s \\ -3a - b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{3/2}{s-1} + \frac{7/2}{s+3} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{3/2}{s-1} + \frac{7/2}{s+3}\right) = -\frac{3}{2}e^{t} + \frac{7}{2}e^{-3t}$$

2) $$\frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = 2e^{-t} - te^{-t}$$

3) $\dfrac{2s+1}{s^2+2s+3} = \dfrac{2s+1}{(s+1)^2+2} = \dfrac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+2} = 2\,\dfrac{s+1}{(s+1)^2+2} - \dfrac{1}{(s+1)^2+2}$

$= \mathcal{L}\left(2e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t - \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\right)$

<u>Esempi</u> (risoluzione del problema di Cauchy):

1) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \underset{\downarrow\ f(t)}{\chi_{(0,1)}(t)} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$s^2\,Y(s) - s\,\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 3(s\,Y(s) - \cancel{y(0)}) = F(s)$

$Y(s) = F(s)\cdot\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$\dfrac{1}{s^2+3s+2} = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} = \mathcal{L}(e^{-t} - e^{-2t})$

$y(t) = \displaystyle\int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,f(\tau)\,d\tau$ formula risolutiva per qualsiasi termine noto $f(t)$

$f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ $\quad t>1 \to y(t) = \displaystyle\int_0^1 \cdots\, d\tau$

$\quad t<1 \to y(t) = \displaystyle\int_0^t \cdots\, d\tau$

$\displaystyle\int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,d\tau = \int_0^t [e^{-\tau} - e^{-2\tau}]\,d\tau = \left[-e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_0^t =$

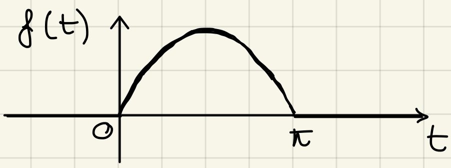
$\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)\,d\tau \overset{u=t-\tau}{=} \int_t^0 f(u)(-du) \overset{\tau=u}{=} \int_0^t f(\tau)\,d\tau$

$= -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}, \quad t<1$

$\displaystyle\int_0^1 [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,d\tau = \left[e^{-(t-\tau)} - \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2}\right]_0^1 = e^{-(t-1)} - \frac{e^{-2(t-1)}}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}$

$y(t) = \begin{cases} -e^{-t} + \dfrac{e^{-2t}}{2} + \dfrac{1}{2} & 0<t<1 \\ -e^{-t}(1-e) + \dfrac{e^{-2t}}{2}(1-e^2) & t>1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'' + 9y = \underbrace{\chi_{(0,\pi)}(t)\operatorname{sen} t}_{f(t)} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$



$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 9\,Y(s) = F(s)$

$$Y(s) = \frac{F(s)+4}{(s^2+9)} = \mathcal{L}\left(f * \frac{1}{3}\operatorname{sen}3t + \frac{4}{3}\operatorname{sen}3t\right)$$

$$y(t) = \frac{4}{3}\operatorname{sen}3t + \frac{1}{3}\int_0^t \operatorname{sen}3(t-\tau)\, f(\tau)\,d\tau$$

$$f(t) = \operatorname{sen}t\ \chi_{(0,\pi)}(t)$$

$$\int_0^t \operatorname{sen}3(t-\tau)\, f(\tau)\,d\tau = \begin{cases} t>\pi, & \int_0^\pi \operatorname{sen}3(t-\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau \\ t<\pi, & \int_0^t \operatorname{sen}3(t-\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sen}3(t-\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\int\left[\cos(3t-4\tau)-\cos(3t-2\tau)\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(3t-4\tau)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(3t-2\tau)\right]$$

$$\int_0^t \operatorname{sen}3(t-\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(3t-4\tau)+\operatorname{sen}(3t-2\tau)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{8}\left[3\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}3t\right]$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}3(t-\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen}3t+\operatorname{sen}3t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}3t-\operatorname{sen}3t\right]_0^\pi$$

$$= \emptyset$$

$$\Longrightarrow\quad y(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}\operatorname{sen}t, & t>\pi \\ \frac{4}{3}\operatorname{sen}t+\frac{1}{24}\left[3\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}3t\right], & 0<t<\pi \end{cases}$$

Ritardo nel dominio del tempo (t-shift)

$$\mathcal{L}\left(f(t-t_0)\,u(t-t_0)\right)(s) = \int_0^{+\infty} f(t-t_0)\,u(t-t_0)\,e^{-st}\,dt =$$

$t-t_0=\tau$
$dt = d\tau$

$$= \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau)\,u(\tau)\,e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau = e^{-st_0}\int_0^{+\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau$$

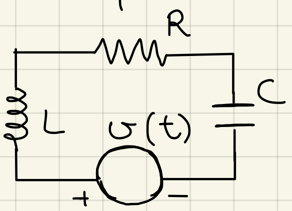
$\hookrightarrow \tau>0$

Formula di t-shift: $\boxed{\mathcal{L}\left(f(t-t_0)\,u(t-t_0)\right)(s) = e^{-st_0}\,\mathcal{L}f(s)}$

$\forall s$ t.c $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma[f]$

Applicazione della trasf. di Laplace ai circuiti elettrici

Circuito LCR



$i(t) =$ intensità di corrente nel circuito

$q(t) =$ carica nel condensatore

$$L i' + R i + \frac{1}{C} \cdot q = v \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q'(t)$$

Derivo ambo i membri:

$$L i'' + R i' + \frac{i}{C} = v'$$ E.D.O. lin. del 2° ordine a coeff. costanti (completa)

Ma se la tensione $v(t)$ non è una funzione derivabile cosa si può fare?

$$q(t) = q(0) + \int_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau} d\tau = q_0 \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$\Longrightarrow \left[L i'(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \left\{ q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right\} = v(t) \right]$$

eq. integro-differenziale dei circuiti LCR

- $q_0 = q(0)$ $\quad i_0 = i(0)$ cond. iniziali
- $v(t)$ assegnata
- L, C, R costanti assegnate $(\neq 0)$
- $i(t)$ funzione incognita

Applichiamo la trasf. di Laplace supponendo $i(t)$ e $v(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabili.

Chiamiamo $I(s) = \mathcal{L}(i(t))(s)$, $\quad V(s) = \mathcal{L}(v(t))(s)$

$$\Longrightarrow L(sI(s) - i(0)) + R I(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{q(0)}{s} + \frac{1}{s} I(s) \right\} = V(s)$$

$$I(s) \left(Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) = V(s) + L i_0 - \frac{q_0}{C \cdot s}$$

$$I(s) = \underbrace{\left(\frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} \right)}_{H(s)} V(s) + \underbrace{\left(\frac{LC i_0 s - q_0}{LCs^2 + RCs + 1} \right)}_{G(s)}$$

Chiamiamo h, g: $\quad \mathcal{L}(h(t))(s) = H(s) \quad \mathcal{L}(g(t)) = G(s)$

$$I(s) = \mathcal{L}(i(t))(s) = \mathcal{L}((h * v)(t) + g(t))(s)$$

$$\Longrightarrow \boxed{i(t) = g(t) + \int_0^t h(t-\tau) v(\tau) d\tau}$$

dipende dal circuito e dalle cond. iniziali, non da $v(t)$. $g \equiv 0$ se $i_0, q_0 = 0$

dipende solo dal circuito

Si verifica che (se $R \neq 0$): $g(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ cioè g è un TRANSITORIO — g è regolare!

La regolarità della soluzione $i(t)$ dipende dal termine integrale.

Se v è continua, $h * v$ è derivabile

Se v è discontinua, $h * v$ è continua ma non derivabile

Es: $R = 2$ $L = 1$ $C = 0{,}5$ $v(t) = 1000\, \chi_{(0,2)}(t)$

$\underbrace{i_0 = 0, \quad q_0 = 0}_{g(t) = 0}$

$$i'(t) + 2i(t) + 2\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t)$$

$$sI(s) + 2I(s) + 2\frac{I(s)}{s} = V(s)$$

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} V(s)$$

$$\frac{s}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} = \mathcal{L}(e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t)$$

$$\Longrightarrow \quad i(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}(\cos(t-\tau) - \operatorname{sen}(t-\tau))\, v(\tau)\,d\tau$$

$$v(t) = 1000\, \chi_{(0,2)}(t)$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 \le t \le 2 & 1000 \int_0^t e^{\tau - t}(\cos(\tau - t) + \operatorname{sen}(\tau - t))\,d\tau \\ t > 2 & 1000 \int_0^2 e^{\tau - t}(\cos(\tau - t) + \operatorname{sen}(\tau - t))\,d\tau \end{cases}$$

$(e^\tau \operatorname{sen}\tau)' =$
$= e^\tau(\operatorname{sen}\tau + \cos\tau) \to$

$$= \begin{cases} 0 \le t \le 2 & 1000 \left[e^{-\tau} \operatorname{sen}\tau\right]_0^t = 1000\, e^{-t}\operatorname{sen} t \\ t > 2 & 1000 \left[e^{\tau - t}\operatorname{sen}(\tau - t)\right]_0^2 = \left[e^{2-t}\operatorname{sen}(2-t) + e^{-t}\operatorname{sen} t\right] 1000 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 \le t \le 2, & 1000\, e^{-t}\operatorname{sen} t \\ t > 2, & 1000\, e^{-t}(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2-t)) \end{cases}$$

(cont. non deriv.)

Circuito RC

$$\left[R i(t) + \frac{1}{C}\left\{q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\} = v(t)\right]$$ eq. integrale (non integro-diff.)

Non devo imporre una condizione i_0

$$R\,i(0^+) + \frac{1}{C}q_0 = v(0^+) \longrightarrow$$ i_0 è determinato dall'equazione

Che regolarità mi posso aspettare su $i(t)$?

Il termine $\int_0^t i(\tau)\,d\tau$ è una funz. continua se $i(\tau)$ è integrabile localmente

Se $v(t)$ è discontinua, $i(t)$ deve essere discontinua.

$\Longrightarrow$ Un'equazione integrale come quella del circuito RC <u>non regolarizza</u>.

$$R\,I(s) + \frac{1}{C}\left\{\frac{q_0}{s} + \frac{I(s)}{s}\right\} = V(s)$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{Cs}{RCs+1}}_{\mathcal{L}(?)}V(s) - \underbrace{\frac{q_0}{RCs+1}}_{\mathcal{L}\left(\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$ transitorio

$\frac{Cs}{RCs+1}$ non può essere la trasformata di una funzione $h(t)$ $\mathcal{L}$-trasf, perché

$$\text{per } \operatorname{Re}\{s\} \longrightarrow +\infty \quad \frac{Cs}{RCs+1} \longrightarrow \frac{1}{R} \neq 0$$

$$\frac{Cs}{RCs+1} = \frac{1}{R}\,\frac{(RCs+1)-1}{RCs+1} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{RCs+1}\right)$$

$$\frac{Cs}{RCs+1}\cdot V(s) = \frac{1}{R}V(s) - \frac{1}{R}V(s)\,\frac{1}{RC}\,\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$
$$= \mathcal{L}\left(\frac{v(t)}{R} - \frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}} * v(t)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{i(t) = \underbrace{\frac{v(t)}{R}}_{\text{stessa regolarità di } v(t)} - \underbrace{\frac{1}{R^2C}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}v(\tau)\,d\tau}_{\text{convoluzione, più regolare di } v(t)} - \underbrace{\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{transitorio, regolare}}}$$

<u>Circuito LR</u>

$$\left[L\,i'(t) + R\,i(t) = v(t)\right]$$ eq. differenziale (non integro-diff.)

Devo conoscere $i(0) = i_0$ ma non q_0.

Mi aspetto che $i(t)$ sia almeno continua, derivabile se v è continua, non deriv. nei punti di discontinuità di v.

$$L(sI(s) - i_0) + RI(s) = V(s)$$

$$I(s) = V(s)\frac{1}{L}\frac{1}{s+\frac{R}{L}} + \frac{i_0}{s+\frac{R}{L}} = \mathcal{L}\left(v(t) * \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L} + i_0 e^{-\frac{R}{L}t}\right)(s)$$

$$\Longrightarrow \boxed{i(t) = \underbrace{i_0 e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{transitorio, regolare}} + \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} v(\tau)\, d\tau}_{\text{ho un grado di regolarità in più rispetto a } v(t)}}$$

Circuito LC $\quad \left[L i'(t) + \frac{1}{C}\left\{q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\} = v(t)\right]$

eq. integro-differenziale

Devo assegnare $i(0) = i_0$ e $q(0) = q_0$

Mi aspetto $i(t)$ un grado più regolare di $v(t)$.

$$L\,(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{C}\left\{\frac{q(0)}{s} + \frac{I(s)}{s}\right\} = V(s)$$

$$I(s) = V(s) \cdot \underbrace{\left(\frac{Cs}{LCs^2+1}\right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{LCi_0 s - q_0}{LCs^2+1}\right)}_{G(s)}$$

Possiamo antitrasformare sia $H = \mathcal{L}h$ che $G = \mathcal{L}g$.

$i(t) = (h * v) + g$ $\qquad g \equiv 0$ se $i_0, q_0 = 0$

$\downarrow$

$i(t)$ più regolare di $v(t)$

In questo caso g NON è un TRANSITORIO (non essendoci R manca il termine di smorzamento $e^{-\alpha t}$)

Equazioni integrali di Volterra

$$\left[y(t) - \int_0^t K(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t)\right]$$

$y(t)$ è la funz. incognita

$f(t)$ è un termine noto (input esterno)

$K(t,\tau)$ nucleo integrale, descrive il sistema

Sono equazioni che descrivono fenomeni "con memoria" o "ereditari", in cui il valore della soluzione al tempo t dipende da tutti i valori della soluzione per tempi precedenti (e.g.: dinamica della popolazione).

Le eq. di Volterra possono essere di seconda specie (quella qui trattata) o di prima specie:

$$-\int_0^t K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau = f(t) \quad 1^\circ \text{ specie}$$ (più difficile da risolvere)

$$y(t) - \int_0^t K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau = f(t) \quad 2^\circ \text{ specie}$$

Caso particolare: $K(t,\tau) = K(t-\tau)$

$$y(t) - \int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = f(t)$$ eq. integrale di Volterra, di 2° specie, di convoluzione

$$\Downarrow$$

$$y(t) - K(t) * y(t) = f(t)$$

$$Y(s) - K(s)\,Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1-K(s)} = \Bigg(1 + \underbrace{\frac{K(s)}{1-K(s)}}_{H(s)}\Bigg) F(s)$$

non la so antitrasf. la so antitrasf.

Se trovo h t.c. $\mathcal{L}h = H$:

$$Y(s) = H(s)F(s) + F(s)$$

$$\boxed{y(t) = h(t) * f(t) + f(t)}$$ la soluzione avrà la stessa regolarità di f

Es: $y + 2y * \cos t = f$ con $f(t) = \cos t$

$$Y(s) + 2Y(s)\frac{s}{s^2+1} = F(s)$$

$$Y(s) = F(s)\cdot\frac{s^2+1}{s^2+2s+1} = F(s)\left(1 - \frac{2s}{(s+1)^2}\right)$$

$$Y(s) = F(s) - F(s)\left(\frac{2(s+1)}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^2}\right) =$$

$$'' \;=\; '' \;-\; ''\left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}\right)$$

$$\longrightarrow\; y(t) = f(t) - f(t) * \left(2e^{-t} - 2te^{-t}\right)$$

$$= f(t) - 2\int_0^t e^{-(t-\tau)}\left[1-(t-\tau)\right] f(\tau)\,d\tau$$ per f qualsiasi

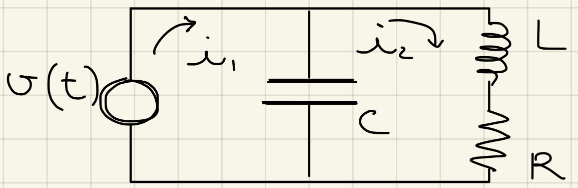
Se $f(t) = \cos t$: $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

$$Y(s) = \frac{s}{\cancel{s^2+1}} \cdot \frac{\cancel{s^2+1}}{s^2+2s+1} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Longrightarrow\; y(t) = e^{-t} - te^{-t}$$

<u>Esempio:</u>



condizioni iniziali nulle

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Cs}\left(I_1(s) - I_2(s)\right) = V(s) \;+ \\ Ls\,I_2(s) + R\,I_2(s) + \dfrac{1}{Cs}\left(I_2(s) - I_1(s)\right) = 0 \;= \end{cases}$$

$$I_2(s)\,(Ls + R) = V(s)$$

$$\begin{cases} I_2(s) = \dfrac{V(s)}{Ls+R} = V(s)\left(\dfrac{1}{L}\cdot\dfrac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) \\ I_1(s) = I_2(s) + Cs\,V(s) = \dfrac{V(s)}{Ls+R} + Cs\,V(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow\; \boxed{i_2(t) = \frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\, v(\tau)\,d\tau}$$

Come lo antitrasformo?

$$\mathcal{L}\left(v'(t)\right)(s) = s\,V(s) - v(0)$$

1. Supponiamo per semplicità che <u>$v(0) = 0$</u>

$$\longrightarrow\; i_1(t) = \frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\, v(\tau)\,d\tau + C\,v'(t)$$

Se, ad es., $v(t) = \operatorname{sen}\omega t$ $\quad (v(0) = 0)$ allora

$$v'(t) = \omega\cos\omega t \qquad v'(0) \neq 0$$

$$i_1(0) = 0 + C\cdot v'(0) \neq 0 \;! \qquad (i_1(t) = 0 \;\; \forall t < 0)$$

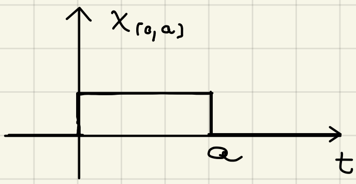
$\Longrightarrow$ Si presenta una discontinuitá della corrente nell' istante iniziale

2. Se $\underline{v(0) \neq 0}$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}(sV(s)) = \mathcal{L}^{-1}(sV(s) - v(0) + v(0)) =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}(sV(s) - v(0)) + v(0)\mathcal{L}^{-1}(1) = v'(t) + v(0)\,\underline{\mathcal{L}^{-1}(1)}$$

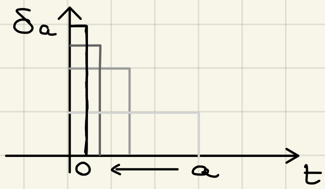
Come lo antitrasformo?

$$\mathcal{L}\left(\chi_{[0,a]}(t)\right)(s) = \int_0^a e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{-sa}}{s}$$



per $a \to 0$ e s fissato, $\frac{1-e^{-sa}}{s} \to 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{a}\chi_{[0,a]}(t)\right)(s) = \frac{1-e^{-sa}}{sa} \sim \frac{sa}{sa} = 1 \text{ per } a \to 0$$



Chiamo $\delta_a(t) = \frac{1}{a}\chi_{[0,a]}(t)$

Quindi $\mathcal{L}\left(\lim_{a\to 0}\delta_a(t)\right)(s) = 1$

e (suppongo valga) anche $\lim_{a\to 0}\mathcal{L}(\delta_a(t)) = 1 = \mathcal{L}(\delta_0)$

δ_0 é detto impulso (delta di Dirac) (NON é una funzione)

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t)\,dt = 1$$

$$\longrightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} v(\tau)\,d\tau + Cv'(t) + Cv(0)\delta_0}$$

Equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico $u(x,y,z)$ generato da una distribuzione continua di cariche di densitá $\rho(x,y,z)$

$$\boxed{\Delta u = 4\pi k \rho}$$

costante di Coulomb

Dal punto di vista matematico, cerco $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ e assegno $\rho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$.

In realtà, ρ potrebbe anche essere discontinua.

ρ sarà in generale integrabile.

$Q_E = \iiint_E \rho \, dx dy dz$ carica totale contenuta nella regione E

Ad esempio ρ può essere una carica puntiforme:

$$Q_E = \begin{cases} q & \text{se } \vec{0} \in E \\ 0 & \text{se } \vec{0} \notin E \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad Q_E = q\,\delta_0$$

$\boxed{\Delta u = 4\pi K \mu}$ con $\mu = q\,\delta_0$ misura di Dirac

Se voglio poter studiare il pot. elettrostatico in corrispondenza di una qualsiasi distribuzione di carica (discreta o continua) devo saper studiare un'equazione differenziale del tipo

$$\underset{\text{funzione}}{\Delta u} = \underset{\text{misura}}{\mu} \quad \text{dove } \mu \text{ è una misura assegnata}$$

Per farlo, ho bisogno di avere un insieme di oggetti: 1) di cui funzioni e misure siano casi particolari e 2) di cui sappia calcolare le derivate. $\left(\frac{d}{dx} \mu(x) = ??? \right)$

In che senso funzioni e misure sono casi particolari di un oggetto più generale?

$$\mu: \quad E \longmapsto \mu(E) \qquad \left(E \longmapsto Q_E = q\delta_0 \right)$$

$$\rho: \quad E \longmapsto \iiint_E \rho \, dx dy dz$$

Funzioni e misure sono particolari funzionali

Ma è meglio studiare i funzionali su spazi di funzioni che su spazi d'insieme

$$\mu: \quad \varphi \longmapsto \int \varphi(x) \, d\mu(x)$$

$$\rho: \quad \varphi \longmapsto \int \varphi(x) \rho(x) \, dx$$

Cerchiamo di vedere funzioni e misure come particolari funzionali lineari continui su un certo spazio di funzioni.

Se X e Y sono 2 sp. di funzioni, $X \subset Y$, sono più numerosi i funzionali continui su X o su Y?

Se $\Lambda: Y \to \mathbb{R}$ a maggior ragione $\Lambda: X \to \mathbb{R}$

Più grande è lo sp. di funzioni, più piccolo lo spazio duale (e viceversa)

Se voglio avere tanti funzionali lin. cont. devo prendere uno sp. di funzioni "piccolo".

Ad es: funzioni molto regolari (sp. di "funzioni test")

L'idea è:

1. introdurre uno sp. di "funzioni test" molto regolari
2. definire le distribuzioni come i funzionali lin. cont. su questo spazio
3. Riconoscere che le funzioni e le misure sono particolari distribuzioni

Spazio di funzioni test su $\mathbb{R}$ (per cominciare; si possono usare anche sp. più complicati)

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ = sp. delle funzioni test su $\mathbb{R}$ = $C_0^\infty(\mathbb{R})$

funz. cont. e nulle fuori da un intervallo limitato (che varia da funz. a funz.)

"bump function"

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ non è uno sp. di Banach (non c'è una norma che tenga conto di infinite derivate)

In $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ non definiamo una norma, ma definiamo direttamente una nozione di convergenza per successioni di funzioni.

Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e sia $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Dico che $f_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se:

1) $\exists [a,b]$ che contiene il supporto di f e di tutte le f_n
2) In $[a,b]$: $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ uniform. e $\frac{d^k}{dx^k} f_n \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{d^k}{dx^k} f$ uniform. $\forall k = 1, 2, \dots$

funzionale — $\mathcal{D}$ non è normato, non vale la solita def. di duale

Def Diciamo che $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ("duale" di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) se $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), T è lineare e inoltre $\forall \{f_n\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se $f_n \to f$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $T(f_n) \to T(f)$

nel senso della conv. in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

(T è un "funzionale lin. cont" su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si dice che T è una distribuzione su $\mathbb{R}$.

"dualità" o "crochet"

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di solito si scrive $\langle T, f \rangle$ invece che $T(f)$; di solito le funzioni test si indicano con φ, ψ.

Vediamo in che senso le funzioni sono particolari distribuzioni.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T_f : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx \ \exists$$

supp(φ) — cont. e limitata — $L^1(a,b)$

T_f è lineare.

T_f è continuo? Mostriamo che se $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $\langle T_f, \varphi \rangle \longrightarrow 0$

$$\varphi_n \longrightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \begin{cases} 1) \ \exists [a,b] \supseteq \operatorname{supp}(\varphi_n) \ \forall n \\ 2) \ \varphi_n \to 0 \text{ uniform. in } [a,b] \end{cases}$$

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \varphi_n(x) f(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,|f(x)|\,dx \leq \underbrace{\|\varphi_n\|_{C^0[a,b]}}_{\downarrow n\to+\infty \ 0} \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{<+\infty} \longrightarrow 0$$

$|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|_{C^0}$

Ogni funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ induce una distribuzione T_f

$$T_f : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\,dx \quad \text{con } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Anzi, f si identifica nella distribuzione stessa che induce (univocamente).

Se $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $T_f = T_g$ cioè $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = \int_{\mathbb{R}} g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

allora si può dimostrare che $f = g$ q.o. $(\{f\} = \{g\})$

$f \sim g$

<u>Esercizi</u> (trasformata di Laplace):

- $y - te^{-t} * y = f$ (eq. integr. di Volterra)

  y: funz. incognita $\qquad f$: termine noto assegnato

  $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$

  $F(s) = \mathcal{L}f(s)$

  $\mathcal{L}(te^{-t}) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

$$Y(s) - \frac{1}{(s+1)^2} Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s)\left[\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s}\right] = F(s)\left[1 - \frac{1}{s(s+2)}\right] = F(s) - F(s)\underbrace{\frac{1}{s(s+2)}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = f(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(1 - e^{-2(t-\tau)}\right) f(\tau)\, d\tau$$

- $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = f \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$ (probl. di Cauchy per E.D.O del 2° ordine)

  $Y(s) = \mathcal{L}y(s) \qquad F(s) = \mathcal{L}f(s)$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) = F(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 2s + 5\right) = F(s) + s - 4 + 2$$

$$Y(s) = F(s)\underbrace{\frac{1}{s^2+2s+5}} + \frac{s-2}{s^2+2s+5}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2+2^2} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t\right)$$

$$\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{3}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2+2^2} = \mathcal{L}\left(e^{-t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t * f(t) + e^{-t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

- $\begin{cases} 3i' + \dfrac{i}{2} = v & \text{con} \quad v(t) = t\,\chi_{(0,1)}(t) \\ i(0) = 2 \end{cases}$

$I(s) = \mathcal{L}i(s) \qquad V(s) = \mathcal{L}v(s)$

$$3\,(sI(s) - i(0)) + \frac{I(s)}{2} = V(s)$$

$$I(s) = \frac{2}{6s+1}V(s) + \frac{12}{6s+1} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} * v(t) + 2e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

$$\Longrightarrow i(t) = \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{6}} v(\tau)\,d\tau + 2e^{-\frac{t}{6}}$$

Se $v(t) = t\,\chi_{(0,1)}(t)$: $\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{6}} v(\tau)\,d\tau = \begin{cases} e^{-\frac{t}{6}}\displaystyle\int_0^t e^{\frac{\tau}{6}}\tau\,d\tau & t<1 \\ e^{-\frac{t}{6}}\displaystyle\int_0^1 e^{\tau/6}\tau\,d\tau & t>1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{t}{6}}\left(6e^{\frac{t}{6}}(t-6) + 36\right) = 6(t-6) + 36e^{-\frac{t}{6}} & t<1 \\ e^{-\frac{t}{6}}\left(-56\,e^{1/6} + 36\right) & t>1 \end{cases}$$

- $\begin{cases} 2i' + \dfrac{1}{4}\left(1 + \displaystyle\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t) & \text{(circuito LC)} \\ i(0) = 0 \end{cases}$

$$2\,(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) = V(s)$$

$$I(s) = \frac{4s}{8s^2+1}V(s) - \frac{1}{8s^2+1}$$

$$\frac{s}{2(s^2+\frac{1}{8})} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \sqrt{8}\,\frac{\sqrt{8}}{8(s^2+\frac{1}{8})} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\frac{t}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\Longrightarrow i(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t-\tau}{2\sqrt{2}}\right) v(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\frac{t}{2\sqrt{2}}$$

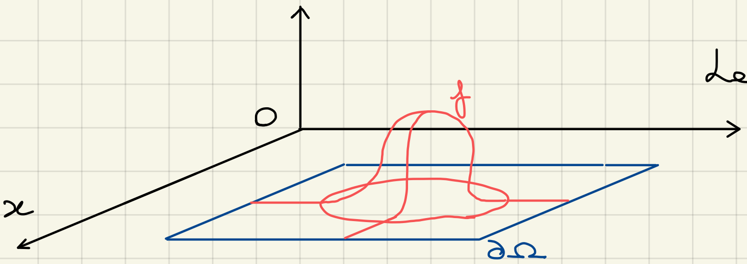
Estensione della teoria delle distribuzioni ad insiemi limitati e a più dimensioni

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto (eventualmente, $\Omega = \mathbb{R}^n$)

Spazio delle funzioni test: $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

cosa significa in $\mathbb{R}^n$?

Supporto compatto di Ω: $f \equiv 0$ fuori da un certo sottoinsieme chiuso e limitato dell'aperto Ω



Le derivate di ogni ordine di f si annullano su $\partial\Omega$ e vicino a $\partial\Omega$.

$\{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega)$ $\quad \varphi_n \longrightarrow 0$ in $D(\Omega)$ se:

1) $\exists$ un insieme chiuso e limitato $K \subseteq \Omega$ tale che $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq K$ $\forall n$

2) $\varphi_n \longrightarrow 0$ uniformemente in K e $\dfrac{\partial^\alpha \varphi_n}{\partial x^\alpha} \longrightarrow 0$ uniformemente in K $\forall \alpha$

$D'(\Omega)$: spazio delle distribuzioni su Ω

$D'(\Omega) = \{ T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), T è lineare e $\forall \{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega)$ se $\varphi_n \longrightarrow 0$ (in $D(\Omega)$) allora $T(\varphi_n) \to 0 \}$

$\downarrow$

T continuo in 0

se T è lineare $\Rightarrow$ T continuo ovunque

Classi di distribuzioni

- In che senso le distribuzioni generalizzano le funzioni

Sia $\boxed{f \in L^1_{loc}(\Omega)}$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $\quad f$ misurab.

$f \in L^1(K)$ $\forall K \subseteq \Omega$ chiuso e limitato

$$\underset{L^1_{loc}(\Omega)}{f} \rightsquigarrow \underset{D'(\Omega)}{T_f} : \underset{D(\Omega)}{\varphi} \longmapsto \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad T_f \text{ lineare}$$

Se $\{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega)$ e $\varphi_n \longrightarrow 0$ in $D(\Omega)$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_K |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \underset{\downarrow\, 0}{\|\varphi\|_{C^0(K)}} \underbrace{\int_K |f(x)|\,dK}_{\text{limitato } (L^1(K))} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow T_f \in D'(\Omega)$

Perciò ogni funz. $L^1_{loc}(\Omega)$ si può vedere come particolare distribuzione (ma NON ogni distribuz. si potrà vedere come funzione!)

- In che senso le distribuzioni generalizzano le misure.

In $\mathbb{R}^n$, consideriamo una misura μ tale che [$\mu(E) < +\infty$ se E è un insieme misurabile e limitato]

$$\mu \longrightarrow T_\mu : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x) = \langle T_\mu, \varphi \rangle$$

$$|\langle T_\mu, \varphi\rangle| \leq \int_{supp(\varphi)} |\varphi(x)|\, d\mu(x) \leq \|\varphi\|_{C^0} \cdot \underbrace{\mu(supp(\varphi))}_{<+\infty}$$

$\Rightarrow$ T_μ è ben definita e ovviamente lineare

Se $\varphi_n \to 0$ in $D(\mathbb{R}^n)$, $|\langle T_\mu, \varphi_n\rangle| \leq \|\varphi_n\| \mu(K)$ ($K \supseteq supp(\varphi_n)\ \forall n$)

$\Rightarrow$ T_μ è una distribuzione

Ogni misura finita sui limitati si può vedere come particolare distribuzione

Se $d\mu(x) = \rho(x)\, dx$ con $\rho \in L^1_{loc}$ rientra nel caso prec.

Es: δ_{x_0} misura di Dirac centrata in x_0

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases}$$ $\rightarrow$ finita sui limitati (e anche illimitati)

$$\langle T_{\delta_{x_0}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\delta_{x_0}(x) = \int_{\{x_0\}} \varphi(x)\, d\delta_{x_0}(x) =$$
$$= \varphi(x_0)\, \delta_{x_0}(\{x_0\}) = \varphi(x_0)$$

- Distribuzioni che non sono né funzioni né misure

es: $T : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0)$ $\quad$ T è ben def., lin., cont.

$\varphi_n \longrightarrow 0$ in $D(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0) \longrightarrow 0$

Chiaramente T non deriva né da funzioni (dovrebbe essere $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi'(0) \ \forall \varphi$) né da misure.

<u>Criterio</u> per dimostrare che un certo funzionale T è una distribuzione

Supponiamo di avere un funzionale lin. $T: D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

Se $\forall$ intervallo $[-N, N]$ $\exists\, c > 0$ e $K = 0, 1, 2 \dots$ per cui

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-N, N]$ vale $|\langle T, \varphi \rangle| \le c \|\varphi\|_{C^K[-N,N]}$

allora T è una distribuzione.

<u>Dim.</u>: supponiamo che $\{\varphi_n\} \subset D(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$.

Significa che $\exists\, [-N, N] \supseteq \operatorname{supp}(\varphi_n)$ $\forall n$ e $\varphi_n \to 0$ unif. in $[-N, N]$

$\frac{d^K \varphi_n}{dx^K} \to 0$ " " " $\forall K$

Ma allora se vale l'ipotesi del criterio:

$|\langle T, \varphi \rangle| \le c \|\varphi_n\|_{C^K[-N,N]} \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$ perciò $T \in D'(\mathbb{R})$

<u>Oss</u>: $D'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Se $T, S \in D'(\Omega)$ anche $\lambda T + \mu S \in D'(\Omega)$

Ogni combinazione lineare di distribuzioni è un'altra distribuzione.

<u>es</u>: $\delta_0 + 5\delta_1$ è una misura e (quindi) anche una distribuzione

$\delta_0 - 5\delta_1$ NON è una misura ma è una distribuzione

Derivata di una distribuzione

Se $T \in D'(\mathbb{R})$, vogliamo definire T'.

Ci aspettiamo che se $T = T_f$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f'(x)}_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \underbrace{\varphi(x)}_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})} dx = \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = \qquad \mathrm{supp}(\varphi) = [a,b]$$

$$= \cancel{\left[f(x)\varphi(x)\right]_a^b} - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Quindi se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \langle (T_f)', \varphi \rangle$$

voglio che sia

Allora se $T \in D'(\mathbb{R})$, T distribuzione qualsiasi

Def: $\boxed{\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle}$ $\quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

Se $T \in D'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$ allora $\varphi' \in D(\mathbb{R})$ perciò $\exists \langle T, \varphi' \rangle$

$\Longrightarrow$ T' è ben def.

la derivata è lineare

$$\langle T', \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = -\langle T, (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)' \rangle = -\langle T, \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' \rangle =$$

$$= -\lambda_1\langle T, \varphi_1' \rangle - \lambda_2\langle T, \varphi_2' \rangle = \lambda_1\langle T', \varphi_1 \rangle + \lambda_2\langle T', \varphi_2 \rangle$$

$\Longrightarrow$ T' è lin. su $D(\mathbb{R})$:

Sia $\{\varphi_n\} \in D(\mathbb{R})$ e $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$. Se $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$ anche $\varphi_n' \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$

Quindi $\langle T', \varphi_n \rangle = -\langle T, \varphi_n' \rangle \longrightarrow 0$ (essendo T continuo su $D(\mathbb{R})$)

$\Longrightarrow$ T' è continuo su $D(\mathbb{R})$

‖ $\forall T \in D'(\mathbb{R})$ se definiamo $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ otteniamo che $T' \in D'(\mathbb{R})$

Ogni distribuzione è derivabile, e la sua derivata è a sua volta una distribuzione. Quindi ogni distribuzione è derivabile infinite volte

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

$$\langle T'', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle$$

Teorema Ogni distribuzione è derivabile infinite volte e

per n = 1 è una definizione, non un teorema

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^{(n)} \langle T, \varphi^{(n)} \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad n = 2,3,4\dots$$

Abbiamo definito T' in modo che nel caso particolare in cui $T = T_f$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ risulti $(T_f)' = T_{f'}$.

Se ora $T = T_f$ ma $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ non è detto che si ottenga lo stesso risultato.

Vediamo di capire, se $f \notin C^1(\mathbb{R})$, cos'è $(T_f)'$, che si dirà "derivata distribuzionale di f"

Es: $f(x) = |x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \cancel{\left[x\,\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0}} - \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx - \left\{\cancel{\left[x\,\varphi(x)\right]_{0}^{+\infty}} - \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx\right\}$$

$$= -\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sign}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\langle (T_{|x|})', \varphi \rangle = \langle T_{\mathrm{sign}(x)}, \varphi \rangle \longrightarrow \boxed{(T_{|x|})' = T_{\mathrm{sign}(x)}}$$

Es:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

in 0 non mi importa se è definita q.o.

$(T_u)' = ?$

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\left[\cancel{\varphi(+\infty)} - \varphi(0)\right] = \varphi(0) = \langle T_{\delta_0}, \varphi \rangle$$

$$\boxed{(T_u)' = T_{\delta_0}}$$

$$\mathrm{sign}(x) = 2u(x) - 1 \longrightarrow T_{\mathrm{sign}(x)} = 2T_u - 1$$

$$(T_{\mathrm{sign}(x)})' = 2(T_u)'$$

$$\Longrightarrow (T_{\mathrm{sign}(x)})' = 2T_{\delta_0} = 2\delta_0$$

$\delta_0' = ?$ $\quad \langle \delta_0', \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$

$|x|$ funzione derivabile a tratti, continua

$\mathrm{sign}(x)$ funzione discontinua

$2\delta_0$ misura

$2\delta_0'$ distribuzione (né misura né funzione)

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si dice "derivata distribuzionale" di f la distribuzione $(T_f)'$.

Nel caso in cui $(T_f)' = T_g$ (la derivata distribuzionale sia identificabile con una funzione $g \in L^1_{loc}$) si dice anche che g è la derivata distribuzionale di f

Teorema (derivata distribuzionale di una $L^1_{loc}(\mathbb{R})$)

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si vuole calcolare $(T_f)'$.

1. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $(T_f)' = T_{f'}$
2. Se $f \in C^1$ tranne in un punto angoloso x_0 in cui è continua allora $(T_f)' = T_{f'}$ dove f' è definita q.o.
3. Se $f \in C^1$ tranne in un punto x_0 di discontinuità salto allora $(T_f)' = T_{f'} + (f(x_0^+) - f(x_0^-))\,\delta_{x_0}$
4. Se $f \in C^1$ tranne in un punto x_0 in cui è continua ma con derivata infinita e $f' \in L^1_{loc}$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

(I p.ti 1-4 si estendono a un n° qualsiasi di punti di non derivabilità)

Es: $\quad (T_{\sqrt[3]{x}})' = T_{\frac{1}{3x^{2/3}}}$ secondo il teorema precedente.

$$\langle (T_{\sqrt[3]{x}})', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \sqrt[3]{x}\, \varphi'(x)\,dx = -\int_{-N}^{N} \sqrt[3]{x}\, \varphi'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ -\int_{-N}^{-\varepsilon} \sqrt[3]{x}\, \varphi'(x)\,dx - \int_{\varepsilon}^{N} \sqrt[3]{x}\, \varphi'(x)\,dx \right\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{ \cancel{\left[\sqrt[3]{x}\,\varphi(x)\right]_{-N}^{-\varepsilon}} - \int_{-N}^{-\varepsilon}\frac{1}{3x^{2/3}}\varphi(x)\,dx + \right.$$
$$\left. + \cancel{\left[\sqrt[3]{x}\,\varphi(x)\right]_{\varepsilon}^{N}} - \int_{\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(x)}{3x^{2/3}}\,dx \right\}$$
$$= \int_{-N}^{N}\frac{\varphi(x)}{3x^{2/3}}\,dx = \langle T_{\frac{1}{3x^{2/3}}}, \varphi \rangle \quad ✓$$

<u>Es</u>: a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3|x+1|$

p.to 4 p.to 1

$(T_f)' = T_{f'}$ con $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}} + 3\,\text{segn}(x+1)$

b) $f(x) = \text{arctg}\,\dfrac{1}{x}$ $\in \mathcal{C}^1$ tranne in $x_0 = 0$ dove c'è un salto

p.to 3

$f(0^+) - f(0^-) = \pi$

$(T_f)' = T_{-\frac{1}{x^2+1}} + \pi\delta_0$

c) $f(x) = e^{-x}u(x) \in \mathcal{C}^1$ tranne in $x_0 = 0$ dove c'è un salto

p.to 3

$f(0^+) - f(0^-) = 1$

$(T_f)' \rightsquigarrow -e^{-x}u(x) + \delta_0$

Estensione della derivata distribuzionale ad insiemi limitati e a più dimensioni.

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.

<u>Def</u>: $\langle \dfrac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle T, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$ per $j = 1, 2, \dots, n$

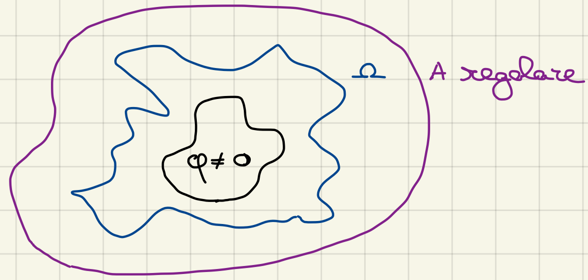
La def. è data in modo che nel caso particolare $T = T_f$ con $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ risulti

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_j} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$$

Verifichiamo ora perché se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ allora:

$$\left[\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi = -\iiint_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]$$ (applicazione del teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)}\ = \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi + f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$



$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(f\varphi\vec{e}_j)\,dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \iiint_A \operatorname{div}(f\varphi\vec{e}_j)\,dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \iint_{\partial A} f\underset{\substack{\downarrow\\ 0 \text{ in } \partial A}}{\varphi}\,\vec{n}_j\cdot d\vec{\sigma} = 0 \qquad \varphi\in C^1_0(\Omega)$$

$$\hookrightarrow \iiint_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi + f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = 0 \implies \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi = -\iiint_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

Si dimostra che $\forall$ distribuzione $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ risulta

$$\left[<\frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha},\varphi> = (-1)^{|\alpha|}<T,\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}>\right] \quad \alpha \text{ multiindice}$$

__es:__ $\underset{\text{laplaciano}}{<\Delta T,\varphi>} = <T,\Delta\varphi> \quad \forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme:

$$\Delta u = c\cdot\delta_0$$

Adesso sappiamo cosa significa che una distribuzione $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ risolve quest'equazione

Sia $\Gamma(x,y,z) = -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (potenziale newtoniano)

soluzione fondamentale dell'operatore Δ in $\mathbb{R}^3$

Si dimostra che $\Delta\Gamma = \delta_0$ cioè:

$$<\Delta\Gamma,\varphi> = <\delta_0,\varphi> = \varphi(0)$$

$T_{\Delta\Gamma}$

$$\| $$

$$<\Gamma,\Delta\varphi> = -\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\Delta\varphi(x,y,z)}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz = \varphi(0,0,0)$$

$\Delta\Gamma$ è una funzione, ma non è $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, quindi $<\Delta\Gamma,\varphi>$ non posso calcolarlo come $\iiint\Delta\Gamma\cdot\varphi$ ma posso calcolarlo in quanto distribuzione come $\iiint\Gamma\Delta\varphi$.

Operazioni sulle distribuzioni

Vogliamo definire sulle distribuzioni certe operazioni che abbiano senso anche per le funzioni.

Es: sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

traslata di f $\quad \tau_a f(x) = f(x+a)$

dilatata di f $\quad D_a f(x) = f(ax)$

riflessa di f $\quad \check{f}(x) = f(-x)$

Queste operazioni si possono definire anche per le distribuzioni?

Consideriamo funzioni e distribuzioni su tutto $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$

→ Traslazione

Sia $T \in D'(\mathbb{R})$. Nel caso particolare di $T = T_f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\varphi(x) dx$$

$$\underset{x+a=y}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \varphi(y-a)\, dy = \langle T_f, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

Def: $\forall\, T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Mostriamo che $\tau_a T \in D'(\mathbb{R}^n)$:

- $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ si ha $\tau_{-a}\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ perciò $\tau_a T$ è ben definita
- $\tau_a T$ è lineare perché $\varphi \longmapsto \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$ è composizione di 2 operazioni lineari
- se $\varphi_k \to 0$ per $D(\mathbb{R}^n)$ anche $\tau_{-a}\varphi_k \to 0$ e $\langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle \to 0$, quindi $\langle \tau_a T, \varphi \rangle \to 0$

quindi $\tau_a T$ è una distribuzione.

Es: $[\tau_a \delta_{x_0} = \delta_{x_0-a}]$ infatti $\langle \tau_a \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \tau_{-a}\varphi \rangle$
$= \tau_{-a}\varphi(x_0) = \varphi(x_0-a) = \langle \delta_{x_0-a}, \varphi \rangle$

Def Si dice che $T \in D'(\mathbb{R})$ é una distribuzione periodica di periodo a se $\tau_a T = T$

→ Dilatazione

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $D_a T_f = T_{D_a f}$

$$\langle D_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_{D_a f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} D_a f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(ax)\varphi(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{a}\right)dy = \langle T_f, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$$

$ax = y$

Def $\forall T \in D'(\mathbb{R})$ $\langle D_a T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$

$\forall T \in D'(\mathbb{R}^n)$ $\langle D_a T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{a^n} D_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$

Es: $[D_a \delta_{x_0} = \frac{1}{a}\delta_{\frac{x_0}{a}}]$ infatti $\langle D_a \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle =$
$= \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}}\varphi(x_0) = \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x_0}{a}\right) = \langle \frac{1}{a}\delta_{\frac{x_0}{a}}, \varphi \rangle$

→ Riflessione

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\check{T}_f = T_{\check{f}}$

$$\langle \check{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi(-y)\,dy = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle$$

$x = -y$

Def $\forall T \in D'(\mathbb{R}^n)$ $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$

Def Si dice che $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ é una distribuzione pari se $\check{T} = T$ e che é dispari se $\check{T} = -T$.

Es: $[\check{\delta}_{x_0} = \delta_{-x_0}]$ infatti $\langle \check{\delta}_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \check{\varphi} \rangle =$

$\left\{ \begin{matrix} \delta_0 \text{ é pari} \\ \delta_0' \text{ é dispari} \end{matrix} \right\}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(-x)\, d\delta_{x_0}(x) = \varphi(-x_0)\, \delta_{x_0}(\{x_0\})$$
$$= \varphi(-x_0) = \langle \delta_{-x_0}, \varphi \rangle$$

→ Prodotto di distribuzione per funzione

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

Nel caso in cui $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $g \cdot T_f = T_{g \cdot f}$

$$\langle g \cdot T_f, \varphi \rangle = \langle T_{g \cdot f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \varphi(x)\, dx = \langle T_f, g \cdot \varphi \rangle$$

ma questo richiede che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulti $g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
ovvero deve essere $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Def $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definiamo

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Es: $[g\delta_{x_0} = g(x_0)\delta_{x_0}]$ infatti $\langle g\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, g\varphi \rangle =$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\, d\delta_{x_0}(x) = g(x_0)\varphi(x_0) = g(x_0) \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

Teorema

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad (\tau_a T)' = \tau_a(T')$

$a > 0 \quad (D_a T)' = a\, D_a(T')$

$(\check{T})' = -(\check{T'})$

$g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad (gT)' = (g')T + g(T')$

Dim: $\langle (\tau_a T)', \varphi \rangle = - \langle \tau_a T, \varphi' \rangle = - \langle T, \tau_{-a}(\varphi') \rangle =$

$$\tau_{-a}(\varphi'(x)) = \varphi'(x-a) = (\varphi(x-a))' = (\tau_{-a}\varphi(x))'$$

$$= - \langle T, (\tau_{-a}\varphi)' \rangle = \langle T', \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle \tau_a(T'), \varphi \rangle$$

$$\langle (D_a T)', \varphi \rangle = - \langle D_a T, \varphi' \rangle = - \langle T, \tfrac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi' \rangle =$$

$$\left(D_{\frac{1}{a}}\varphi(x)\right)' = \left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\varphi'\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}D_{\frac{1}{a}}(\varphi')$$

$$= -\langle T, (D_{\frac{1}{a}}\varphi)'\rangle = \langle T', D_{\frac{1}{a}}\varphi\rangle = \langle a D_a(T'), \varphi\rangle$$

$$\langle (\check{T})', \varphi\rangle = -\langle \check{T}, \varphi'\rangle = -\langle T, (\check{\varphi'})\rangle =$$

$$(\check{\varphi})' = (\varphi(-x))' = -\varphi'(-x) = -(\check{\varphi'})$$

$$= -\langle T, -(\check{\varphi})'\rangle = \langle T', -\check{\varphi}\rangle = \langle -(\check{T'}), \varphi\rangle$$

$$\langle (gT)', \varphi\rangle = -\langle gT, \varphi'\rangle = -\langle T, g\varphi'\rangle =$$

$$(g\varphi)' = g'\varphi + g\varphi' \rightarrow g\varphi' = (g\varphi)' - g'\varphi$$

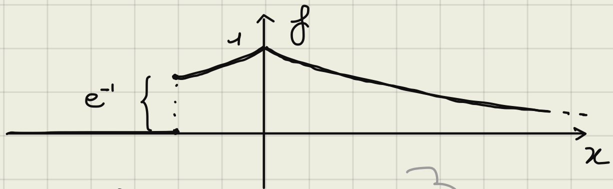
$$= -\langle T, (g\varphi)' - g'\varphi\rangle = \langle T, g'\varphi\rangle - \langle T, (g\varphi)'\rangle =$$

$$= \langle g'T, \varphi\rangle + \langle T', g\varphi\rangle = \langle (g'T + gT'), \varphi\rangle$$

Esercizi:

Calcolare la derivata distribuzionale delle seguenti, φ > funzioni:

a) $f(x) = e^{-|x|}u(x+1)$

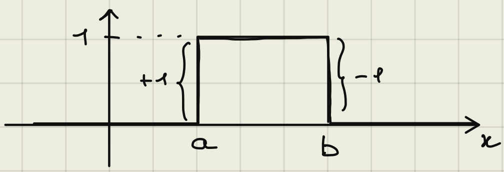


$\left\{\begin{array}{l}\text{possiamo confondere } f(x) \text{ con } T_f \\ \text{NON possiamo confondere } f'(x) \text{ con } (T_f')\end{array}\right.$

$$(T_f)' = \delta_{-1}\cdot e^{-1} + u(x+1)\underbrace{(e^{-|x|})'}_{-e^{-|x|}\operatorname{sign}(x)} = \frac{\delta_{-1}}{e} - e^{-|x|}\operatorname{sign}(x)\,u(x+1)$$

NON è una funzione!

b) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$



$(T_f)' = \delta_a - \delta_b$

- $T = D_3\tau_{-2}\delta_0$

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle D_3\tau_{-2}\delta_0, \varphi\rangle = \langle \tau_{-2}\delta_0, \tfrac{1}{3}D_{\frac{1}{3}}\varphi\rangle =$$

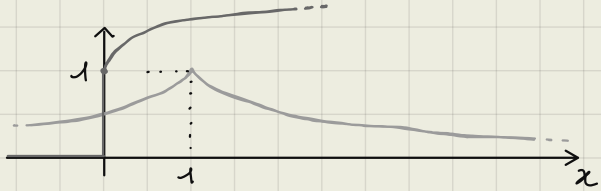
$$= \langle \delta_0, \tau_2\tfrac{1}{3}D_{\frac{1}{3}}\varphi\rangle = \langle \delta_0, \tfrac{1}{3}\varphi\left(\tfrac{x+2}{3}\right)\rangle = \tfrac{1}{3}\varphi\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$$= \langle \frac{\delta_{\frac{2}{3}}}{3}, \varphi\rangle$$

- $T = D_{\frac{1}{2}}(x\delta_0')$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle D_{\frac{1}{2}}(x\delta_0'), \varphi \rangle = \langle x\delta_0', 2\varphi(2x) \rangle = \langle \delta_0', 2x\varphi(2x) \rangle$$
$$= -\langle \delta_0, \frac{d}{dx}(2x\varphi(x)) \rangle = -\langle \delta_0, 2(\varphi(2x) + 2x\varphi'(x)) \rangle$$
$$= -2(\varphi(0) + 0) = -2\varphi(0) \implies T = -2\delta_0$$

- $f(x) = \overset{g(x)}{e^{-|x-1|}} + \overset{h(x)}{(1+\sqrt[3]{x})}\, u(x)$



1. $(T_f)' = ?$

$$(T_g)' = -e^{-|x-1|}\operatorname{sign}(x-1)$$
$$(T_h)' = \delta_0 + u(x)\left(\frac{1}{3x^{2/3}}\right)$$
$$\implies (T_f)' = -e^{-|x-1|}\operatorname{sign}(x-1) + \delta_0 + \frac{u(x)}{3x^{2/3}}$$

2. $x(T_f)' = ?$

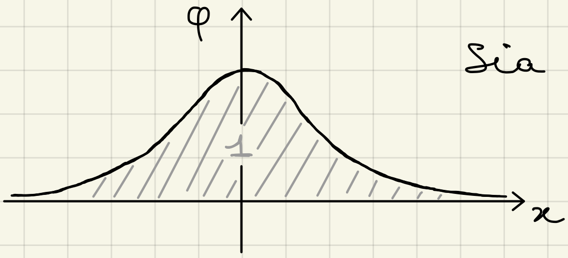
$x\delta_0 = 0$

$$x(T_f)' = -xe^{-|x-1|}\operatorname{sign}(x-1) + u(x)\frac{\sqrt[3]{x}}{3}$$

- $(D_2(e^{-x}\delta_0'))' = ?$

$$\langle (D_2(e^{-x}\delta_0'))', \varphi \rangle = -\langle D_2(e^{-x}\delta_0'), \varphi'(x) \rangle = -\langle e^{-x}\delta_0', \frac{\varphi'(\frac{x}{2})}{2} \rangle$$
$$= -\langle \delta_0', \frac{e^{-x}}{2}\varphi'(\tfrac{x}{2}) \rangle = \langle \delta_0, \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{2}\varphi'(\tfrac{x}{2})\right) \rangle =$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{2}\varphi'(x)\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(-\varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0)\right) = -\frac{1}{2}\varphi'(0) + \frac{1}{4}\varphi''(0) =$$
$$\implies (D_2(e^{-x}\delta_0'))' = \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta''}{4}$$

Approssimazioni dell'identità o nuclei regolarizzanti o mollificatori



Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) \geq 0$, integrab.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$$

φ è detta funzione "madre".

Considero la famiglia di funzioni $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ in } \mathbb{R} \qquad \left(\varphi_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right) \text{ in } \mathbb{R}^n\right)$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ é una campana tanto più alta e concentrata tanto più é piccolo ε

<u>Esempi</u>: nucleo di Gauss: $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$

nucleo di Poisson: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ $\qquad (f * \varphi_\varepsilon)(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy}$

(ricorda che $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$) $\qquad$ media dei valori di f (che pesa di più i valori di y vicini a x)

<u>Teorema</u> Sia $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ una famiglia di nuclei come sopra.
Allora: se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\quad 1 \leq p < +\infty$

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ per } \varepsilon \to 0^+$$

$$\text{se } f \in C^0_*(\mathbb{R}^n)$$

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \text{ uniform. per } \varepsilon \to 0^+$$

<u>Teorema</u> Se $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ sono una famiglia di nuclei come sopra e inoltre $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora

$$f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(cioé $f * \varphi_\varepsilon$ é regolare, anche se f non lo é, e approssima bene f, per ε piccolo)

<u>Successioni di distribuzioni</u>

Sia $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subseteq D'(\Omega)$, Ω insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $T \in D'(\Omega)$

Cosa significa che $T_k \longrightarrow T$ per $k \to +\infty$?

$$\langle T_{f_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)\,dx \longrightarrow \langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

$(a,b) = \mathrm{supp}(\varphi)$

$$\int_a^b f_k(x)\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

come dire che $f_k \longrightarrow f$ in $L^1(a,b)$

Siano $\{f_k\} \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e supponiamo che $\forall\, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $f_k \to f$ in $L^1(a,b)$; allora $\langle T_{f_k}, \varphi\rangle \to \langle T_f, \varphi\rangle$.

Def Se $\{T_k\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ diciamo che

$$\lim_{k\to+\infty} T_k = T \quad \text{se} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Es: $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\langle \delta_n, \varphi\rangle \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{\delta_n \to 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$

$\varphi(\pm\infty) = 0$

$$\{\delta_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \langle \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi\rangle = \varphi\left(\tfrac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle \Rightarrow \delta_{\frac{1}{n}} \to \delta_0$$

Es: $\{n\,\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$ $\quad f_n(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $f_n \to 0$ q.o.

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} n\,\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\,\varphi(x)\,dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx =$$

$$= n\,\frac{2}{n}\,\varphi(x_n) \longrightarrow 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi\rangle \Rightarrow T_{f_n} \to 2\delta_0$$

teo. del val. medio
$x_n \to 0$ per $n \to +\infty$

In altre parole, "il $\lim\limits_{k\to+\infty}$ si porta dentro e fuori $\langle \cdot, \cdot \rangle$"

mollificatore $\quad$ f. test

$$\varphi_\varepsilon(x) \longmapsto \langle T_{\varphi_\varepsilon}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)\,\phi(y)\,dy$$

se φ (funzione madre) è pari

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(0-y)\,\phi(y)\,dy = (\varphi_\varepsilon * \phi)(0)$$

$\phi \in D(\mathbb{R}) \subseteq C^0_*(\mathbb{R})$

Per il teorema sui mollificatori sappiamo che $\varphi_\varepsilon * \phi \to \phi$ uniform.

quindi $(\varphi_\varepsilon * \phi)(0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \phi(0)$

$$\langle T_{\varphi_\varepsilon}, \phi \rangle \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \langle \delta_0, \phi \rangle$$

$$\varphi_\varepsilon \longrightarrow \delta_0$$

Si può dimostrare che $\forall T \in D'(\mathbb{R})$ $\left[T' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\tau_h T - T) \right]$

def. di derivata tramite rapporto incrementale

Serie di distribuzioni

Se $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D'(\mathbb{R})$, $T \in D'(\mathbb{R})$, cos'è $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$?

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \overset{\circledast}{=} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} T_k$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} T_k, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle \sum_{k=1}^{n} T_k, \varphi \rangle =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle T_k, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

Dalla def. di limite di una succ. di distrib. se vogliamo che valga $\circledast$ dobbiamo definire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \quad \text{se} \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

In altre parole, "la $\sum_{n=1}^{\infty}$ si porta dentro e fuori $\langle \cdot, \cdot \rangle$"

Es: $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)}$ è una distribuzione?

$$\langle \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)}, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_k^{(k)}, \varphi \rangle = \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi^{(k)}(k)}^{T} < +\infty \quad \forall \varphi \in D$$

Sia $\varphi_n \to 0$ in $D(\mathbb{R})$, $\exists [-N, N] \supseteq \text{supp}(\varphi_n)$ $\forall n$

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| = \left| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \varphi_n^{(k)}(k) \right| \leq \sum_{k=0}^{N} |\varphi_n^{(k)}(k)| \leq (N+1) \|\varphi_n\|_{C^N_{[-N,N]}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

T è una distribuzione ✓

Es: $\Delta_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na} \quad a > 0$ ("treno di impulsi" o "pettine di Dirac")

Sia $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $supp(\varphi) \subseteq [-N, N]$

$$|<\Delta_a, \varphi>| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} <\delta_{na}, \varphi>\right| = \left|\sum_{|n|\leq \frac{N}{a}} \varphi(na)\right| \leq \left(\frac{2N}{a}+1\right) \|\varphi\|_{C^0[-N,N]}$$

$<\Delta_a, \varphi>$ è ben def., lin., cont. $\Longrightarrow$ Δ_a è una distrib. ✓

Teorema Supponiamo che $\{T_n\} \subseteq D(\mathbb{R})$, $T \in D(\mathbb{R})$ t.c.

1) $T_n \to T$ allora $T_n' \to T'$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T'$

Dim: 1) $T_n' \to T$ se $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $<T_n', \varphi> \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} <T', \varphi>$

$$<T_n', \varphi> = -<T_n, \varphi'> \longrightarrow -<T, \varphi'> = <T', \varphi>$$

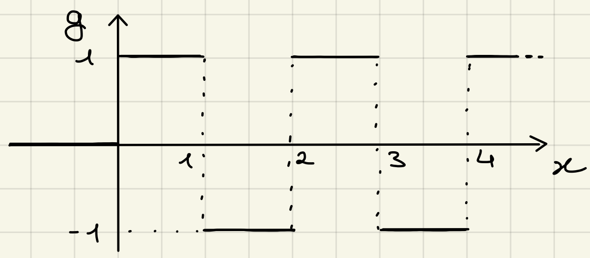
2) $\sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T'$ cioè $<\sum_{n=1}^{\infty} T_n', \varphi> = <T', \varphi>$

$$<\sum_{n=1}^{\infty} T_n', \varphi> = \sum_{n=1}^{\infty} <T_n', \varphi> = -\sum_{n=1}^{\infty} <T_n, \varphi'> = -<\sum_{n=1}^{\infty} T_n, \varphi'> =$$

$$= -<T, \varphi'> = <T', \varphi>$$

Es: $f(x) = x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1]}(x)}_{T}$. Verifichiamo che T_f è una distrib. e calcoliamo $(T_f)'$.

$T = T_g$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$



$x^2 T \in D'(\mathbb{R})$ poiché $x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\longrightarrow$ T_f è una distrib.

$$(T_f)' = (x^2 T)' = 2x T + x^2 T' = 2x T + x^2 \left(\delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2 \delta_n\right)$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{(n,n+1)}(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \delta_n \quad \leftarrow x^2\delta_n = n^2\delta_n$$

Convoluzione di distribuzioni

Siano $T, S \in D'(\mathbb{R}^n)$, cos'è $T * S$?

Caso particolare: $T_f * T_g = T_{f*g}$ se f e $g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, \varphi(x)\, dx}_{\psi(y)} \Big) dy =$$

$$= \langle T_g, \psi \rangle =$$

$$= \langle T_g(y), \langle T_f, \tau_y \varphi \rangle \rangle$$

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(z)\, \underbrace{\varphi(y+z)}_{\tau_y \varphi(z)}\, dz$$

Quindi la "candidata" def. per la convoluzione di distribuzioni è:

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S(y), \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle$$

ma siamo sicuri che $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle \in C_0^\infty(\mathbb{R})$?

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si può dimostrare che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è detto che ψ sia a supporto compatto

Es: $T = T_f \quad f(x) = 1 \quad \longrightarrow \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau_y \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)\, dx$
$= \text{const.}$

$\Rightarrow$ ψ non è a supp. compatto.

Non posso sperare di definire la convoluzione di due distribuzioni qualsiasi.

Ho bisogno di fare un'ipotesi in più su S o su T

- o chiedo a T qualcosa in più in modo che $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle$ sia in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (e quindi $\langle S, \psi \rangle$ sia ben def $\forall S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

- o chiedo a S qualcosa in più in modo che $\langle S, \psi \rangle$ sia ben def anche se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non a supp. compatto

Ci sono tante possibili risposte a questo problema, cioè diversi insiemi di ipotesi su T e S che rendano sensata $T * S$.

Una possibilità sta nel concetto di distribuzione a supporto compatto.

Def Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si dice che T è una distribuzione a supporto compatto (si scrive $T \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$) se $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato tale che

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ se } \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K \text{ allora } \langle T, \varphi \rangle = 0$$

In altre parole, la distribuzione "legge" la funzione test solo "nell'" insieme K.

Esempi:

- se $T = T_f$ dove $f \in L^1_{loc}$ è a supp. compatto, anche T_f lo è
- se $T = T_\mu$ dove μ è una misura nulla fuori da un insieme chiuso e limitato, T_μ è a supp compatto.
- derivate e comb. lin (finite) di distrib. a supp. compatto sono anch'esse a supp. compatto

Teorema Siano $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Se $T \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ allora $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Se $S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ allora $\langle S, \psi \rangle$ ha senso $\forall \varphi \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Se una delle due è $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ allora è ben def.
$T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S, \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle$
Infine, $T * S = S * T$.

Notiamo che se $T \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ anche T', $\tau_a T$, $D_a T$, $\check{T}$, $f \cdot T \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ se $f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$

Es: $T * \delta_{x_0}$ per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qualsiasi ($\underline{\text{NB}}$: $\delta \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$)

$$\langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle = \langle T, \tau_{x_0} \varphi \rangle = \langle \tau_{-x_0} T, \varphi \rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{T * \delta_{x_0} = \tau_{-x_0} T} \quad \left(\text{in part.: } \boxed{T * \delta_0 = T}\right)$$

$\delta_{x_0} * T$ verifichiamo la commutività:

$$\langle \delta_{x_0} * T, \varphi \rangle = \langle T, \langle \delta_{x_0}, \tau_y \varphi \rangle \rangle = \langle T, \tau_{x_0} \varphi \rangle = \langle \tau_{-x_0} T, \varphi \rangle \ \checkmark$$

Es: $T * S$, $T \in D'(\mathbb{R})$ $S \in D'_0(\mathbb{R})$ (o viceversa)

$(T*S)' = ?$ $\quad <(T*S)', \varphi> = -<T*S, \varphi'> = -<S, <T, \tau_y(\varphi')>> =$

$\tau_y(\varphi') = (\tau_y \varphi)'$ infatti $\frac{d}{dx}(\varphi(x+y)) = \varphi'(x+y)$

$= <S, <T', \tau_y \varphi>> = <T' * S, \varphi>$

$$\Longrightarrow \boxed{(T*S)' = T' * S = T * S'}$$

<u>Teorema</u> Siano $T \in D(\mathbb{R}^n)$, $S \in D'_0(\mathbb{R}^n)$ o viceversa. Allora:

$$T * \delta_{x_0} = \tau_{-x_0} T$$

$$\partial^\alpha (T*S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$$

<u>Applicazione alle equazioni a derivate parziali</u>

In $\mathbb{R}^n$ sia L un op. diff. lin. (di ordine m) a coeff. costanti, ossia:

$$L u = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \quad \text{con } c_\alpha \text{ costanti, } \alpha \text{ multi indice}$$

esempi: $L = \Delta$ $\quad L = \partial_t - \Delta$ $\quad L = \partial^2_{tt} - \Delta$ $\quad L = i\partial_t - \Delta$

<u>Def.</u> Si dice che $\Gamma \in D'(\mathbb{R}^n)$ é una soluzione fondamentale dell'operatore L se $L\Gamma = \delta_0$.

$$<L\Gamma, \varphi> = <\delta_0, \varphi> = \varphi(0)$$

$$\overset{\shortparallel}{<\sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha \Gamma}{\partial x^\alpha}, \varphi>} = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} <\Gamma, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}> = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

ad es: il laplaciano $L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Gamma(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ sol. fondamentale del laplaciano $\quad \Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma \, \Delta\varphi(\vec{x}) \, dx\, dy\, dz = \varphi(\vec{0}) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$$

Cosa serve avere una soluzione fondamentale?

Supponiamo di conoscere una sol. fondam. Γ dell'operatore L e di risolvere l'equazione

$$Lu = T \qquad T \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n) \qquad \text{cerco } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Dico che la sol. u é $u = \Gamma * T$ difatti:

$$Lu = L(\Gamma * T) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha (\Gamma * T) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \{(\partial^\alpha \Gamma) * T\} =$$
$$= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha \Gamma\right) * T = (L\Gamma) * T = \delta_0 * T = T$$

La teoria delle distribuzioni si presta a trattare eq. a derivate parziali lineari di qualunque ordine a coefficienti $\mathcal{C}^\infty$. Per queste eq. é chiaro cosa significa che una certa $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ risolve $Lu = T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Teorema di Malgrange - Ehrenpreis

Ogni operatore diff. lineare a coeff. costanti in $\mathbb{R}^n$ ha una soluzione fondamentale in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Trasformata di Fourier di Distribuzioni

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cerchiamo una def. consistente per $\hat{T}$.

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi =$$

$\forall f, \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad \int \hat{f}\varphi = \int f\hat{\varphi}$

$$= \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$$

Perció la "candidata" def. di trasf. di Fourier di una distrib. é: $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.

Tuttavia dovrei sapere che $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

É vero che se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

NO, é sempre falso tranne che per $\varphi = 0$.

<u>Teorema</u> Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f e $\hat{f}$ hanno supp. compatto.
Allora $f = 0$ q.o.

Quello che sappiamo é che se $\varphi \in S(\mathbb{R})$ anche $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$.

(Il problema é analogo a quello di convoluzione di distribuzioni)

Dobbiamo introdurre una nuova classe di distrib. intermedia tra $D_0'(\mathbb{R}^n)$ e $D'(\mathbb{R}^n)$

$\Longrightarrow$ classe delle distribuzioni temperate $S'(\mathbb{R}^n)$

Spazio di Schwartz $S(\mathbb{R}^n) \supseteq D(\mathbb{R}^n)$ $\quad (S'(\mathbb{R}^n) \subseteq D'(\mathbb{R}^n))$

Dobbiamo introdurre, come per $D(\mathbb{R}^n)$, una nozione di convergenza di succ. di funzioni in $S(\mathbb{R}^n)$

Sia $\{f_k\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che $f_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$ se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^h) \left| \frac{\partial^\alpha f_k(x)}{\partial x^\alpha} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{per } k \to +\infty \quad \forall h = 0, 1, 2 \ldots \ \forall \alpha$$

decrescenza rapida

Diremo che $f_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} f$ se $(f_k - f) \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$

<u>NB</u>: se $\{f_k\} \subseteq D(\mathbb{R}^n)$ e $f_k \xrightarrow{D(\mathbb{R}^n)} 0$ allora anche $f_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$

<u>Def.</u> Si dice che $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, ossia che T é una distrib. temperata su $\mathbb{R}^n$, se

$T: S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, T é lineare, $\forall \{\varphi_k\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

se $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$ allora $\langle T, \varphi_k \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Ogni distribuzione temperata é una particolare distribuzione $(S'(\mathbb{R}^n) \subseteq D'(\mathbb{R}^n))$

Criterio di continuità. Per $\varphi \in S(\mathbb{R})$ poniamo

$$p_{n_1}^{(n_2)}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(1+|x|^{n_1}\right) \sum_{k=0}^{n_2} \left| \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \right| \quad (\text{"seminorma"})$$

Sia $T: S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, lineare.

Se $\exists\, n_1, n_2 = 0, 1, 2 \dots$ e $c > 0$ t.c.

$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c\, p_{n_1}^{(n_2)}(\varphi) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$ allora $T \in S'(\mathbb{R})$.

Teorema

- Se $T \in D_0'(\mathbb{R}^n)$ allora $T \in S'(\mathbb{R}^n)$
- Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p \in [1, +\infty]$ allora $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$
- Se f è una funz lentamente crescente all'infinito, cioè $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $|f(x)| \leq c(1+|x|^k)$ per qualche $c, k > 0$, allora $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

non cresce più di una certa potenza

Teorema Sia $T \in S'(\mathbb{R})$ allora anche $T', \tau_a T, \check{T}, D_a T \in S'(\mathbb{R})$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, f cresce lentamente, allora $fT \in S'(\mathbb{R})$

Def. Sia $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. Si definisce $\hat{T}$ ponendo

$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Si ha che $\hat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$

Se $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ anche $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ quindi il crochet con T è ben def. e ovviamente lineare.

Mostriamo che $\hat{T}$ è continuo.

Sia $\varphi_k \to 0$ in $S(\mathbb{R}^n)$; si dimostra che allora anche

$\hat{\varphi}_k \to 0$ in $S(\mathbb{R}^n)$ e quindi $\langle T, \hat{\varphi}_k\rangle \to 0$ perché $T \in S'(\mathbb{R}^n)$

perciò $\langle \hat{T}, \varphi_k\rangle \to 0$ ossia $\hat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\forall T \in S'(\mathbb{R})$ vale la formula di inversione $\hat{\hat{T}} = \check{T}$

$$< \hat{\hat{T}}, \varphi > = < \hat{T}, \hat{\varphi} > = < T, \hat{\hat{\varphi}} > = < T, \check{\varphi} > = < \check{T}, \varphi >$$

$\hat{\hat{\varphi}}(\xi) = \varphi(-\xi)$

Esempi:

$\mathcal{F}(\delta_a) = ?$

$$< \mathcal{F}(\delta_0), \varphi > = < \delta_0, \hat{\varphi} > = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = < T_1, \varphi >$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\delta}_0 = 1}$$

$$< \mathcal{F}(\delta_a), \varphi > = < \delta_a, \hat{\varphi} > = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i a x}\, dx =$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i a x}} \qquad = < T_{e^{-2\pi i a x}}, \varphi >$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\hat{\delta}}_a = \check{\delta}_a = \delta_{-a} \\ \mathcal{F}(e^{-2\pi i a \xi}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-2\pi i a x}) = \delta_{-a}}$$

$-i2\pi a x \to a = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\boxed{\mathcal{F}(\cos \omega x)} = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(e^{i\omega x}) + \mathcal{F}(\underbrace{e^{-i\omega x}})\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[\delta_{\frac{\omega}{2\pi}} + \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}}\right]}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\sin \omega x)} = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right) = \boxed{\frac{1}{2i}\left[\delta_{\frac{\omega}{2\pi}} - \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}}\right]}$$

Teorema (proprietà della trasf. di Fourier e derivata di distrib.)

Se $T \in S'(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(T') = 2\pi i \xi \hat{T}$

$$\mathcal{F}(T^{(n)}) = (2\pi i \xi)^n \hat{T}$$

$$(\hat{T})' = \mathcal{F}(-2\pi i x T)$$

$$(\hat{T})^{(n)} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^n T)$$

Dim. $\mathcal{F}(T')$: $< \widehat{(T')}, \varphi > = < T', \hat{\varphi} > = - < T, (\hat{\varphi})' > =$

$$= - < T, \mathcal{F}(-2\pi i x \varphi(x)) > = - < \hat{T}, -2\pi i x \varphi >$$

$$= < 2\pi i \xi \hat{T}, \varphi >.$$

Iterando ottengo $\mathcal{F}(T^{(n)})$.

$(\hat{T})'$: $\langle (\hat{T})', \varphi \rangle = -\langle \hat{T}, \varphi' \rangle = -\langle T, \widehat{(\varphi')} \rangle =$

$= -\langle T, 2\pi i \xi \hat{\varphi} \rangle = \langle -2\pi i x T, \hat{\varphi} \rangle =$

$= \langle \mathcal{F}(-2\pi i x T), \varphi \rangle$.

Iterando ottengo $(\hat{T})^{(n)}$.

Es: $\mathcal{F}((-2\pi i x)^n) = (\hat{1})^{(n)} = \delta_0^{(n)}$

$\mathcal{F}(x^n) = \dfrac{1}{(-2\pi i)^n} \delta_0^{(n)}$ e quindi $\mathcal{F}(x) = -\dfrac{\delta_0'}{2\pi i}$

Esercizi:

- $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ $\qquad f \notin L^1, \quad f \notin L^2$

$f \in L^1_{loc}$ perché $x^2+x+1 \neq 0 \quad \forall x$

$|f(x)| \leq c(1+|x|) \quad \forall x$

$\Longrightarrow$ f é lentamente crescente, perciò induce una distribuzione temperata $\hat{T}_f \to \hat{f}$

$\to \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^3}{x^2+x+1} e^{-2\pi i \xi x} dx$ diverge !

$\to \langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$

$f(x) = q(x) + \dfrac{r(x)}{x^2+x+1} \Longrightarrow f(x) = x+1 + \dfrac{1}{x^2+x+1}$

$$\begin{array}{ccc|c}
x^3 & & & x^2+x+1 \\ \hline
-x^3 & -x^2 & -x & x-1 \quad q(x) \\
 & -x^2 & -x & \\
 & x^2 & +x \quad +1 & \\
 & & r(x) \quad 1 &
\end{array}$$

$\Big[\mathcal{F}(f(x)) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(1) + \mathcal{F}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)\Big]$

$\mathcal{F}(x) \to \dfrac{\delta_0'}{-2\pi i}$

$\mathcal{F}(1) \to \delta_0$

$\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) \to$ calcolo coi residui (applicabile quando: gr(den) $\geq$ gr(num)+1)

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x^2+x+1}\, dx =$$

$$= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2+z+1}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\dots, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \left(\dfrac{e^{-2\pi i \xi z}}{2z+1}\right)\Big|_{z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i \xi (1+i\sqrt{3})} \\ \xi < 0 & 2\pi i \left(\dots\right)\Big|_{z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi i \xi(-1+i\sqrt{3})} \end{cases}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{T}_f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|} e^{i\pi\xi} - \frac{\delta_0'}{2\pi i} - \delta_0$$

- $\mathcal{F}\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)(\xi) = ?$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\mathcal{F}(T_f) \Longrightarrow \hat{f} = \mathcal{F}(1) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \delta_0 - \pi e^{-2\pi|\xi|}$$

- $\mathcal{F}(x \operatorname{sen} x) = ?$

$f(x) = x \operatorname{sen}(x) \in L^1_{loc}$

$|f(x)| \leq |x|$ f é lentamente crescente $\to T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(\operatorname{sen} x)(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \frac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{2i}$$

$$\mathcal{F}(-2\pi i x T)(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{T}$$

$$\mathcal{F}(xT) = \frac{1}{-2\pi i}\hat{T}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}(x \operatorname{sen} x) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{2i}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{4\pi}$$

- $\mathcal{F}(\delta'_\pi + \delta'_{-\pi})(\xi) = ?$ $\qquad T = \delta'_\pi + \delta'_{-\pi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$= \mathcal{F}(\delta'_\pi) + \mathcal{F}(\delta'_{-\pi}) =$ $\quad \mathcal{F}(T') = 2\pi i \xi \hat{T}$

$= 2\pi i \xi \{\mathcal{F}(\delta_\pi) + \mathcal{F}(\delta_{-\pi})\} = 2\pi i \xi \{e^{-2\pi^2 i \xi} + e^{2\pi^2 i \xi}\}$

$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2\pi i a \xi}$ $\qquad \leq 2\pi|\xi| \cdot 2 \longrightarrow$ funzione lentamente crescente

- Verificare che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (1) $\delta_a * \delta'_b = \delta'_{a+b}$

(2) $\delta'_a * \delta'_b = \delta_a * \delta''_b$

$\delta_a^{(k)}$ sono distr. a supp. compatto $\longrightarrow$ la convoluzione é ben definita

$(T * S)' = T' * S = T * S'$

$\delta_a * T = \tau_{-a} T \longrightarrow \tau_{-a}\delta_b = \delta_{a+b} \longrightarrow \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

$\delta_a * \delta'_b = (\delta_a * \delta_b)' = \delta'_{a+b}$ (1)

$\delta'_a * \delta'_b = (\delta_a * \delta'_b)' = \delta_a * \delta''_b$ (2)

$\mathcal{F}(\operatorname{sen}^2 x)(\xi) = ?$

$\mathcal{F}(\operatorname{sen} x)(\xi) = \dfrac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{2i}$ $\qquad \operatorname{sen}^2(x) = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2$

$= \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4}$

$\mathcal{F}(e^{2\pi i a x})(\xi) = \delta_a$

$\mathcal{F}(\operatorname{sen}^2 x)(\xi) = -\frac{1}{4}\left(\mathcal{F}(e^{2ix}) + \mathcal{F}(e^{-2ix}) - 2\delta_0\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(\delta_{\frac{1}{\pi}} + \delta_{-\frac{1}{\pi}}\right) + \frac{1}{2}\delta_0$

NB: le regole per la trasformata di dilatazioni, riflessioni, traslazioni, moltiplicazioni si estendono dalle funzioni alle distribuzioni temperata

es: $\mathcal{F}(D_a T) = D^a(\hat{T}) \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Teorema Se $T \in S'(\mathbb{R})$ e $f \in S(\mathbb{R})$ allora $T * f = T * T_f$ é ben definita, é una distribuzione temperata e

$$\mathcal{F}(T * f) = \hat{T} \cdot \hat{f}$$

$$\mathcal{F}(T f) = \hat{T} * \hat{f}$$

Successioni e serie di distribuzioni temperate

Nello spazio test: $\{T_n\} \subseteq D'(\mathbb{R})$, $T \in D'(\mathbb{R})$ $\quad T_n \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} T$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

Def Sia $\{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$, $T \in S'(\mathbb{R})$. Si dice che

$$T \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} T \quad \text{se} \quad \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

Di conseguenza $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \text{ in } S'(\mathbb{R})}$, $\quad \{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$, $T \in S'(\mathbb{R})$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} T$$

$$\sum_{k=1}^{n} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} T_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

Teorema Sia $\{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$, $T \in S'(\mathbb{R})$. Allora

1) $T_n \longrightarrow T \implies \hat{T}_n \longrightarrow \hat{T}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} T_n = T \implies \mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}$

Dim: 1) $\hat{T}_n \to \hat{T}$ significa $\langle \hat{T}_n, \varphi \rangle \to \langle \hat{T}, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle \hat{T}_n, \underset{\in S}{\varphi} \rangle = \langle T_n, \hat{\varphi} \rangle \longrightarrow \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle \quad (\hat{\varphi} \in S)$$

analogamente 2)

Es: $\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[2k,2k+1]}(x)\right)(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathcal{F}\left(\chi_{[2k,2k+1]}(x)\right)(\xi)}_{\int_{2k}^{2k+1} e^{-2\pi i \xi x} dx} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right]_{2k}^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(2k+1)\xi} - e^{-2\pi i(2k)\xi}}{-2\pi i\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-4\pi i k\xi}}{2\pi i\xi}\left(1 - e^{-2\pi i\xi}\right)$$

Serie trigonometriche e distribuzioni temperate

Teorema Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k\omega x}$$

con $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ successione lentamente crescente cioè:

$\exists\, c, N > 0$ t.c. $|a_k| \geq c(1+|x|^N)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Allora la serie definisce una distribuzione temperata.

Dim Sia $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \langle e^{2\pi i k\omega x}, \varphi\rangle\right| =$$

$$= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{2\pi i k\omega x}\,dx\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\,|\hat{\varphi}(-k\omega)| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(1+|x|^N)\,|\hat{\varphi}(-k\omega)| \leq$$

$$\varphi \in S(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}) \longrightarrow |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{c}{1+|\xi|^{N+2}}$$

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq P^{(0)}_{N+2}(\hat{\varphi}) / (1+|\xi|^{N+2})$$

$$\leq c\, p^{(0)}_{N+2}(\hat{\varphi}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|^N)}{(1+|k\omega|^{N+2})} \leq c\, p^{(0)}_{N+2}(\hat{\varphi}) \leq c\, p^{(\dots)}_{\dots}(\varphi)$$

Es: $\mathcal{F}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)}\Big) =$

come serie di funzioni diverge in tutto $\mathbb{R}$, come serie di distribuzioni converge in $S'(\mathbb{R})$ (é una serie trig. con coeff. lentamente crescenti)

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\cos kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{\frac{k}{2\pi}} + \delta_{\frac{k}{2\pi}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_0\right)$$

$\sum_n \delta_{na} = \Delta_a$ treno di impulsi

Il treno di impulsi Δ_a $\forall a > 0$ é una distribuzione temperata. Dimostriamolo:

$$|\langle \Delta_a, \varphi\rangle| - \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \delta_{ka}, \varphi\rangle| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka)\Big| \leq p_2^{(0)}(\varphi) \overbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+|ka|^2}}^{<+\infty}$$

$$|\varphi(x)| \leq \frac{p_N^{(0)}(\varphi)}{1+|x|^N} \qquad = p_2^{(0)}(\varphi)\cdot c$$

Inoltre $\mathcal{F}(\Delta_a) = \mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\delta_{na}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n a \xi}$

Teorema $\mathcal{F}(\Delta_1) = \Delta_1$ e $\forall a>0$ $\mathcal{F}(\Delta_a) = \frac{1}{a}\Delta_{\frac{1}{a}}$

Dim Si dimostra che $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x} = \Delta_1}$.

Quindi $\mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n x}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\left(e^{2\pi i n x}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = \Delta_1$

si scrive la serie di Fourier in forma exp. di

(f' sarebbe Δ_1 nel senso delle distrib.) $f(x) = x$, $x\in[0,1)$ 1-periodica

cioè $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$ ma $\underset{①}{(T_f)'} = \overbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underset{②}{(a_n e^{2\pi i n x})'}}^{③}$

① $(T_f)' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = \Delta_1$

② $a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{in\omega t}\,dt = \int_0^1 t e^{2\pi i n t}\,dt = \left[\frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n}\cdot t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi i n} - \cancel{\left[\frac{e^{2\pi i n t}}{(2\pi i n)^2}\right]_0^1} = \frac{1}{2\pi i n}$

③ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n e^{2\pi i n x})' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n}\right)' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{2\pi i n x}\right)$

$\Longrightarrow \quad \Delta_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n x}$

Esercizi:

- $f(x) = \dfrac{x^4 - ix^2 + 5}{x^2 + i}$ funzione lent. crescente $\to T_f \in S'(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - ix^2 + 5 & x^2 + i \\ \hline -x^4 - ix^2 & x^2 - 2i \\ -2ix^2 + 5 & \\ +2ix^2 - 2 & \\ 3 & \end{array}$$

$f(x) = q(x) + \dfrac{r(x)}{x^2+i}$

$= x^2 - 2i + \dfrac{3}{x^2+i}$

$$\hat{T}_f = \mathcal{F}(x^2) - 2i\,\mathcal{F}(1) + 3\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+i}\right) =$$

$$= \frac{\delta_0''}{-4\pi^2} - 2i\,\delta_0 + 3\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+i}\right)$$ pari, calcolo solo per $\xi > 0$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+i}\right) = -2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+i}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\pi i\left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z}\right)\Bigg|_{z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\pi i\sqrt{2}\,\frac{e^{-\sqrt{2}\pi i \xi(1-i)}}{1-i} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} i(1+i)\,e^{-\sqrt{2}\pi i \xi}\,e^{-\sqrt{2}\pi\xi}, \quad \xi > 0$$

$$\Longrightarrow \hat{T}_f = -\frac{\delta_0''}{4\pi^2} - 2i\,\delta_0 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}(1-i)\,e^{-\sqrt{2}\pi i|\xi|}\,e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|}$$

- $T = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\,\delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^2 k\,\delta_k = \sum k^3 \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Proviamo che $T = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \langle \delta_k, \varphi\rangle\right| =$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \varphi(k)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} k^3 |\varphi(k)| \le p_5^{(0)}(\varphi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{1+k^5}$$

$|\varphi(k)| \le \dfrac{p_N^{(0)}(\varphi)}{1+|k|^N}$

$\Longrightarrow T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3\,\mathcal{F}(\delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-2\pi i k\xi}$$

Semplificare $T = \tau_2\left[\left(D_{\frac{1}{2}}(x^2\delta_2)\right)'\right]$

$$T = \tau_2\left[\left(D_{\frac{1}{2}}(4\delta_2)\right)'\right] = \tau_2\left[(4\cdot 2\,\delta_4)'\right] = \tau_2(8\delta_4') = 8\delta_2'$$

$$\hat{T} = \mathcal{F}(8\delta_2') = 8\cdot 2\pi i\xi\,\mathcal{F}(\delta_2) = 16\pi i \xi\, e^{-4\pi i \xi}$$

- 1) $L i'(t) + \frac{1}{C}\left\{q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\} = v(t)$

con $L = 2$, $C = \frac{1}{4}$, $q_0 = 1$, $i(0) = 1$, $v(t)$ generica

$$2\,(s I(s) - i(0)) + 4\left\{\frac{1}{s} + \frac{I(s)}{s}\right\} = V(s)$$

$$I(s)\left(\frac{2s^2+4}{s}\right) = V(s) + \frac{2s-4}{s}$$

$$I(s) = V(s)\underbrace{\left(\frac{s}{2s^2+4}\right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{2s-4}{2s^2+4}\right)}_{G(s)}$$

$$H(s) = \frac{s}{2(s^2+2)} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t\right)$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2+2} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \mathcal{L}\left(\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right)$$

$$\Longrightarrow \quad i(t) = h*v + g = \int_0^t \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}(t-\tau)v(\tau)d\tau + \cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$$

- $y(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)}(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t)$ eq. integr. di Volterra di 2° specie di convoluzione

$$y - y*(e^{-t}\cdot t) = f$$

$$Y(s) - Y(s)\cdot\frac{1}{(s+1)^2} = F(s)$$

$$Y(s)\left(\frac{s^2+2s}{s^2+2s+1}\right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s)\,\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s} = F(s) + F(s)\underbrace{\frac{1}{s^2+2s}}_{H(s)}$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\frac{1}{2} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = f(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(1-e^{-2(t-\tau)}\right)f(\tau)d\tau$$

Sia $f(x) = x^2 e^{-x}\chi_{(0,+\infty)}(x)$. Prevedere le proprietà di $\hat{f}$ e calcolarla.

- $\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$ per $\xi \to \pm\infty$
- $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})\ \forall n \Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\hat{f} \in C^0_* \cap L^2 \cap C^\infty$, non mi aspetto simmetrie

$$\mathcal{F}\left(e^{-x}\chi_{(0,+\infty)}(x)\right)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2\pi i\xi x}dx = \left[\frac{e^{-x(1+2\pi i\xi)}}{-(1+2\pi i\xi)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i\xi}$$

$$\mathcal{F}\left(x^2 g(x)\right)(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2}\mathcal{F}\left((-2\pi i x)^2 g(x)\right) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\hat{g}(\xi)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{1+2\pi i\xi}\right) = \left(-\frac{2\pi i}{(1+2\pi i\xi)^2}\right)' = 2\cdot\frac{-4\pi^2}{(1+2\pi i\xi)^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}\left(x^2e^{-x}\chi_{(0,+\infty)}(x)\right)(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\left(-\frac{2\cdot 4\pi^2}{(1+2\pi i\xi)^3}\right) = \frac{2}{(1+2\pi i\xi)^3}$$

- $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+i)(x^2-4i)}$ $\quad f \in L^1$, f dispari $\Longrightarrow \hat{f}$ dispari

$$\left.\begin{matrix} xf \in L^1 \\ x^2 f \notin L^1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{f} \in C^1$$

Calcolo $\hat{f}$ per $\xi > 0$ poi simmetrizzo: $\quad f \in C^\infty \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \ \forall n$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{-2\pi i \xi x}}{(x^2+i)(x^2-4i)}\, dx \qquad \text{poli: } x_{1,2} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2}(1+i)$$

$$\hat{f}_+(\xi) = -2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{z e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+i)(z^2-4i)}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+i)(z^2-4i)}, -\sqrt{2}(1+i) \right) \right\}$$

$$= -\cancel{2}\pi i \left\{ \left(\frac{\cancel{z} e^{-2\pi i \xi z}}{\cancel{2}\cancel{z}(z^2-4i)} \right)\Bigg|_{z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}} + \left(\frac{\cancel{z} e^{-2\pi i \xi z}}{2\cancel{z}(z^2-4i)} \right)\Bigg|_{z=-\sqrt{2}(1+i)} \right\}$$

$$= -\pi i \left\{ \frac{e^{-2\pi i \xi (1-i)}}{-5i} + \frac{e^{2\pi i \xi (1+i)}}{5i} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{5} \left\{ e^{-\sqrt{2}\pi i \xi} e^{-\sqrt{2}\pi \xi} - e^{2\sqrt{2}\pi i \xi} e^{-2\sqrt{2}\pi \xi} \right\} \qquad \text{per } \xi > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{5}\, \mathrm{sign}(\xi) \left\{ e^{-\sqrt{2}\pi i |\xi|} e^{-\sqrt{2}\pi |\xi|} - e^{2\sqrt{2}\pi i |\xi|} e^{-2\sqrt{2}\pi |\xi|} \right\}$$

Sia $f(x) = (x^2 e^{-2x^2})$. Calcolare $\hat{f}(\xi)$ sapendo che $\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 \xi^2}$.

f reale pari $\longrightarrow \hat{f}$ reale pari

$f \in S(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R})$

$$g(x) = e^{-x^2} \qquad g^{\sqrt{2}}(x) = e^{-(\sqrt{2}x)^2} \qquad \mathcal{F}(g^{\sqrt{2}}(x))(\xi) = \hat{g}_{\sqrt{2}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)$$

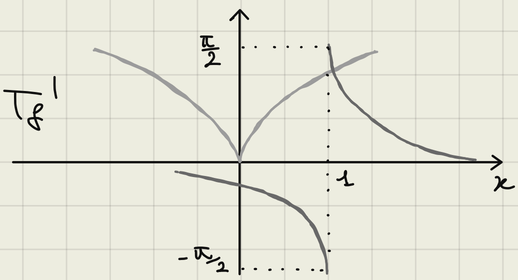
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\xi^2}$$

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-2x^2}) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{g}(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \left(-\cancel{2}\xi \frac{\pi^2}{\cancel{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\xi^2} \right)' = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\xi^2} - \cancel{2}\xi^2 \frac{\pi^2}{\cancel{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\xi^2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{8}}\, e^{-\frac{\pi^2}{2}\xi^2} (1 - \pi^2 \xi^2)$$

- $f(x) = \sqrt{|x|} + \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Calcolare T_f'



$\rightarrow (\sqrt{|x|})' = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}\, \mathrm{sign}(x)$

$$\to \left(T_{\arctan \frac{1}{x-1}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2} + \pi\delta_1 = -\frac{1}{(x-1)^2+1} + \pi\delta_1 =$$

$$= -\frac{1}{x^2-2x+2} + \pi\delta_1$$

$$\Longrightarrow \left(T_f\right)' = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}\,\mathrm{sign}(x) - \frac{1}{x^2-2x+2} + \pi\delta_1$$

$T = D_3(\tau_3(x\delta_2'))$ 1) Semplificare T 2) Calcolare $T * e^{-x^2}$

1) $$\langle T, \varphi\rangle = \langle D_3(\tau_3(x\delta_2')), \varphi\rangle = \langle \tau_3(x\delta_2'), \tfrac{1}{3}D_{\frac{1}{3}}\varphi\rangle =$$

$$= \langle x\delta_2', \tau_{-3}\tfrac{1}{3}\varphi\left(\tfrac{x}{3}\right)\rangle = \langle \delta_2', \tfrac{x}{3}\varphi\left(\tfrac{x-3}{3}\right)\rangle =$$

$$= -\langle \delta_2, \left(\tfrac{x}{3}\varphi\left(\tfrac{x-3}{3}\right)\right)'\rangle = -\langle \delta_2, \tfrac{1}{3}\varphi\left(\tfrac{x-3}{3}\right) + \tfrac{x}{9}\varphi'\left(\tfrac{x-3}{3}\right)\rangle$$

$$= -\left(\tfrac{1}{3}\varphi\left(\tfrac{2-3}{3}\right) + \tfrac{2}{9}\varphi'\left(\tfrac{2-3}{3}\right)\right) = -\tfrac{1}{3}\varphi\left(-\tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{2}{9}\varphi'\left(-\tfrac{1}{3}\right) =$$

$$= \langle \underbrace{-\frac{\delta_{-1/3}}{3} + \frac{2}{9}\delta'_{-1/3}}_{T}, \varphi\rangle$$

2) $$T * e^{-x^2} = -\frac{1}{3}\left(\delta_{-\frac{1}{3}} * e^{-x^2}\right) + \frac{2}{9}\left(\delta'_{-\frac{1}{3}} * e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{3}e^{-(x+\frac{1}{3})^2} + \frac{2}{9}\left(e^{-(x+\frac{1}{3})^2}\right)' =$$

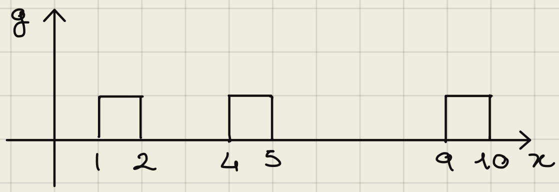
$$= -\frac{1}{3}e^{-(x+\frac{1}{3})^2} + \frac{2}{9}\left(-2\left(x+\tfrac{1}{3}\right)e^{-(x+\frac{1}{3})^2}\right) = -\frac{e^{-(x+\frac{1}{3})^2}}{3}\left(1 + \frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= -\frac{e^{-(x+\frac{1}{3})^2}}{27}\left(\frac{13}{3} + 4x\right)$$

- Sia $f(x) = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x)$.

1) Dimostrare che $f \in S'(\mathbb{R})$

$f(x) = x^2 \cdot g(x)$ $\quad g \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\quad f$ misurab.



$\Longrightarrow$ f lentamente crescente perciò è una distribuzione temperata

2) Calcolare $(T_f)'$

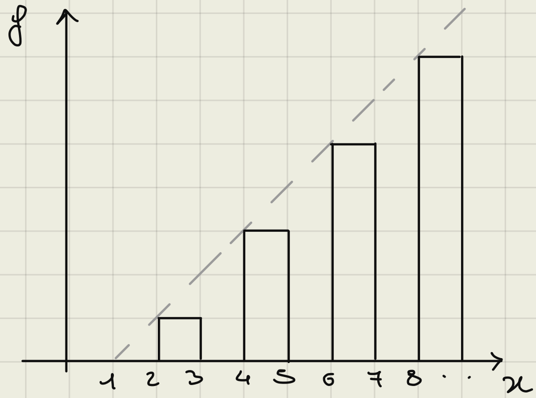
ampiezza delle δ

$$(T_f)' = 2x\,g(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[k^4\delta_{k^2} - (k^2+1)^2\delta_{k^2+1}\right]$$

$$= 2x\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(k^2, k^2+1)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{k^4\delta_{k^2} - (k^2+1)^2\delta_{k^2+1}\right\}$$

- $T = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \chi_{[2k,2k+1]}(x)$.

Dimostrare che $T \in S'(\mathbb{R})$ e calcolare T' e $\hat{T}$



$T = T_f$

f é lentam. crescente $0 \leq f < x$

$\Longrightarrow T \in S'(\mathbb{R})$

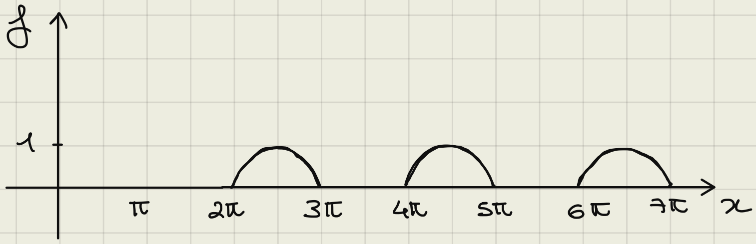
$$T' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(\delta_{2k} - \delta_{2k+1}) \in S'(\mathbb{R}) \setminus D'_0(\mathbb{R})$$

$$\hat{T} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathcal{F}(\chi_{[2k,2k+1]}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{2k}^{2k+1} e^{-2\pi i \xi x}\, dx =$$

$$= \sum k \left[\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right]_{2k}^{2k+1} = \sum \left(k\, e^{-2\pi i \xi 2k}\right) \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \right) =$$

$$= \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \right) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(k\, e^{-4\pi i \xi k}\right)}_{\text{serie a coeff. lentam. crescenti } \in S'(\mathbb{R})}$$

- $T = \operatorname{sen} x \sum_{k=1} \chi_{[2\pi k,\, (2k+1)\pi]}(x)$.



$T = T_f$

$f \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in S'(\mathbb{R})$

f é cont. e regolare a tratti.

$$T' = f' = \cos x \sum_{k=1} \chi$$

$$T = \operatorname{sen} x \cdot g(x)$$

$$\hat{T}_g = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2\pi k}^{(2k+1)\pi} e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \left(\frac{1 - e^{-2\pi^2 i \xi}}{2\pi i \xi} \right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4k\pi^2 i \xi} = \hat{g}(\xi)$$

$$\hat{T} = \mathcal{F}(\operatorname{sen} x\, g(x)) = \mathcal{F}(\operatorname{sen}(x)) * \mathcal{F}(g(x)) =$$

$$= \left(\frac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{2i} \right) * \hat{g}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi - \frac{1}{2\pi}) - \hat{g}(\xi + \frac{1}{2\pi})}{2i}$$